1^{er} Coloquio del Departamento de Matemáticas

Topología Conjuntista y el Universo de los Números Reales

Vladimir Tkachuk Vladimirovich

Casa abierta al tiempo

Topología Conjuntista y el Universo de los Números Reales

Vladimir Tkachuk Vladimirovich

Departamento de Matemáticas, UAM-I

Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana

Contenido

Capítulo 1

Teoría de Conjuntos: los primeros pasos

La Teoría de Conjuntos constituye una base para el desarrollo de todas las matemáticas, ya que todo concepto matemático puede expresarse mediante conjuntos y operaciones sobre ellos. Pero sólo la Topología General se entrelaza con la Teoría de Conjuntos a tal grado, que muchos problemas topológicos no se pueden resolver en el marco del sistema actual de axiomas. Además, es prácticamente imposible indicar una línea que separe los métodos de la Teoría de Conjuntos y los métodos del estudio de los espacios topológicos. Por eso, un entendimiento profundo de la Topología General es impensable sin una preparación fuerte en la Teoría de Conjuntos.

El propósito de esta clase es estudiar el concepto de la *cardinalidad* de un conjunto. Primero veremos esta noción de manera intuitiva llegando al final no sólo a su trato riguroso sino también probaremos varios teoremas clásicos sobre el comportamiento de cardinalidades. Intuitivamente, la cardinalidad de un conjunto A es el número de los elementos de A.

Tratemos de dar una definición formal de ello para conjuntos finitos. Para empezar, relexionemos sobre el siguiente enunciado: "el conjunto A tiene 2007 elementos". Intuitivamente esto significa que podemos elegir una enumeración $\{a_1, \ldots, a_{2007}\}$ de los elementos de A. Esta enumeración no puede ser cualquiera; en primer lugar, tiene que abarcar todos los elementos de A, es decir debemos tener la igualdad $A = \{a_1, \ldots, a_{2007}\}$ y, en segundo lugar, la enumeración debe ser *fiel*, es decir $i \neq j$ tiene que implicar $a_i \neq a_j$. Es un buen ejercicio demostrar, haciendo uso de la inducción matemática que una tal enumeración siempre existe para cualquier conjunto finito.

EJERCICIO 1.1. Pruebe que si A tiene n elementos y tenemos una enumeración $\{a_1, \ldots, a_n\}$ del conjunto A tal que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ entonces esta numeración es fiel.

EJERCICIO 1.2. Supongamos que A es un conjunto finito y $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es una enumeración fiel de A. ¿Existirá un número natural m

distinto de n para el cual haya otra enumeración fiel $\{b_1, \ldots, b_m\}$ del mismo conjunto A?

Obsérvese que en nuestro intento de dar la definición de cardinalidad ya tenemos los números para medir ésta; los elementos de $\mathbb{N}$ nos sirven de indicadores de la cantidad de los elementos que tiene un conjunto. Pero ¿qué tal conjuntos infinitos? ¿Con qué "números" mediríamos su cardinalidad? Las respuestas a estos planteamientos no son fáciles y requieren un muy buen entendimiento del concepto de *función*.

Definición 1.3. Dados conjuntos A y B una función $f\colon A \to B$ se llama *inyectiva* (o inyección) si $a \neq a'$ implica que $f(a) \neq f(a')$.

Definición 1.4. Si A y B son conjuntos entonces una función $f\colon A \to B$ se llama sobreyectiva si $f(A) = B$, es decir, para cada $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Definición 1.5. Una función f se llama biyección si f es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

Observe que la función $f\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dada por la fórmula $f(x) = x^2$ es sobreyectiva pero no inyectiva mientras la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la igualdad $g(x) = \arctan(x)$ es inyectiva pero no sobreyectiva. Las tres clases de funciones que acabamos de introducir serán muy útiles para poder comparar cardinalidades de conjuntos.

Ejercicio 1.6. Dados dos conjuntos arbitrarios A y B pruebe que existe una inyección $f\colon A \to B$ si y sólo si existe una sobreyección $g\colon B \to A$.

Ejercicio 1.7. Dadas funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ demostrar que

a) si f y g son inyecciones entonces $g \circ f\colon A \to C$ también es una inyección;
b) si f y g son sobreyecciones entonces $g \circ f\colon A \to C$ también es una sobreyección;
c) si f y g son biyecciones entonces $g \circ f\colon A \to C$ también es una biyección.

Dado un conjunto A, haciendo $\mathrm{id}_A(x) = x$ para todo $x \in A$, obtenemos la función *identidad* $\mathrm{id}_A\colon A \to A$. Podríamos decir que la función identidad no hace nada, dejando todos los puntos de A en su lugar. De modo que la función identidad no es muy interesante en sí misma. Sin embargo, nos va a servir para definir el siguiente concepto fundamental.

Definición 1.8. Dada una función $f\colon A \to B$, una función $g\colon B \to A$ se llama la inversa de f (y se escribe que $g = f^{-1}$) si $f \circ g = \mathrm{id}_B$ y $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Aquí hay dos observaciones importantes. Primero, el símbolo f^{-1} *no significa la inversión en los número reales,* es decir $f^{-1}(x)$ no tiene nada que ver con el número $\frac{1}{f(x)}$ en el caso de ser f una función real.

Segundo, en la definición dijimos *la inversa* de f dejando entrever que la inversa es única, es decir no pueden existir dos inversas distintas de f. Efectivamente, éste es el caso aunque no es tan evidente de la definición.

Ejercicio 1.9. Dada una función $f\colon A \to B$ probar que existe máximo una inversa de f. En otras palabras, si existen inversas $g, h\colon B \to A$ para la función f entonces $g = h$.

Ejercicio 1.10. Probar que si $f\colon A \to B$ entonces existe una inversa para f si y sólo si f es una biyección.

Ejercicio 1.11. Dada una biyección $f\colon A \to B$ probar que su función inversa $f^{-1}\colon B \to A$ también es una biyección.

En este momento ya estamos preparados para aprender cómo se comparan las cardinalidades de conjuntos arbitrarios (no necesariamente finitos). Sin embargo, *estará fuera de nuestro alcance el concepto de cardinalidad* ya que para dar su definición rigurosa necesitaríamos una buena parte de un curso avanzado de la Teoría de Conjuntos.

Definición 1.12. Si A y B son conjuntos, se dice que la cardinalidad de A no excede la cardinalidad de B (y se escribe $|A| \leq |B|$) si existe una inyección $f\colon A \to B$. Se dice que las cardinalidades de A y B son iguales (y se escribe $|A| = |B|$ en este caso) si existe una biyección $f\colon A \to B$. Finalmente, se dice que la cardinalidad de A es estrictamente menor que la cardinalidad de B (o sea, $|A| < |B|$) si $|A| \leq |B|$ pero no es cierto que $|A| = |B|$.

Claro que nuestra definición de comparación de cardinalidades no serviría de nada si no coincidiera con la comparación del número de elementos en conjuntos finitos.

Ejercicio 1.13. Probar que para cualesquiera conjuntos finitos A y B

a) el número de elementos de A es menor o igual que el número de elementos de B si y sólo si $|A| \leq |B|$;
b) el número de elementos de A es igual al número de elementos de B si y sólo si $|A| = |B|$.

El uso de los símbolos de desigualdades numéricas sugiere que las (des)igualdades cardinales tienen las mismas propiedades. Esto no es consecuencia inmediata de las definiciones pero resulta ser cierto, aunque a veces la demostración no es nada trivial.

EJERCICIO 1.14. Probar que para cualesquiera conjuntos A y B

a) si $A \subset B$ entonces $|A| \leq |B|$;
b) $|A| = |A|$ y $|A| \leq |A|$;
c) si $|A| = |B|$ entonces $|B| = |A|$;
d) si $|A| = |B|$ y $|B| = |C|$ entonces $|A| = |C|$;
e) si $|A| = |B|$ entonces $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$;
f) si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$ entonces $|A| \leq |C|$;
g) si A es finito y B es infinito entonces $|A| < |B|$.

Ya hemos visto que la cardinalidad de conjuntos finitos se mide con números naturales, es decir los elementos de $\mathbb{N}$. De aquí es clara la importancia de medir la cardinalidad por medio del conjunto $\mathbb{N}$ entero.

DEFINICIÓN 1.15. Un conjunto A se llama numerable si $|A| \leq |\mathbb{N}|$; recuerde que esto significa que existe una inyección de A en $\mathbb{N}$.

Los conjuntos numerables tienen mucha más importancia que los conjuntos finitos. El siguiente ejercicio presenta las propiedades principales de los conjuntos numerables.

EJERCICIO 1.16. Demuestre que

a) cualquier subconjunto de un conjunto numerable es numerable;
b) un conjunto A es numerable si y sólo si existe una sobreyección $f\colon \mathbb{N} \to A$;
c) cualquier conjunto infinito contiene un conjunto infinito numerable.

Ahora que podemos comparar la cardinalidad de conjuntos es útil verificar qué tanto coincide esta comparación con el hecho de que un conjunto tiene más puntos que el otro. Por ejemplo, aparentemente el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales tiene muchos más puntos que el conjunto $\mathbb{N}$ pero ¿será así de acuerdo a la definición formal? La respuesta ya no es fácil y se deducirá del siguiente resultado.

TEOREMA 1.17. *Supongamos que A_n es un conjunto numerable para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto $A = \bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ también es numerable. En otras palabras, cualquier unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. El primer paso es construir una sobreyección de $\mathbb{N}$ sobre el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ de todos los pares ordenados de los naturales. Hagamos $B_k = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m + n = k\}$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Es evidente que $B_1 = \emptyset$ mientras $|B_k| = k - 1$ para todo $k \geq 2$; ademas, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$. Hagamos $m_k = 0 + 1 + \ldots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$ y consideremos los conjuntos $C_1 = \emptyset$, $C_2 = \{1\}$, $C_3 = \{2, 3\}$ y, en general, $C_k = \{m_{k-1} + 1, \ldots, m_k\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Es fácil ver que $|C_k| = m_k - m_{k-1} = k - 1 = |B_k|$ así que podemos fijar una sobreyección $h_k : C_k \to B_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $n \in C_k$; hagamos $h(n) = h_k(n)$. Los conjuntos C_k son disjuntos así que tenemos bien definida la función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Como $h(C_k) = h_k(C_k) = B_k$, el conjunto B_k esta contenido en $h(\mathbb{N})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Los conjuntos B_k cubren a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y por lo tanto $h(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ así que la función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es una sobreyección.

Por ser el conjunto A_n numerable existe una sobreyeccion $g_n : \mathbb{N} \to A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cualquier $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ hagamos $f(m, n) = g_n(m) \in A_n \subset A$; ésto nos da una función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$. Si $a \in A$, entonces existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in A_n$; como g_n es sobreyectiva, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ para el cual $g_n(m) = a$. De modo que $f(m, n) = g_n(m) = a$ lo cual prueba que la función f es sobreyectiva y por lo tanto el conjunto A es numerable (véase Ejercicio 1.16). □

COROLARIO 1.18. *Los números racionales forman un conjunto numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un número $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y consideremos el conjunto $Q_n = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}\}$. La igualdad $Q_n = \{0\} \cup (\bigcup\{\{-\frac{m}{n}, \frac{m}{n}\} : m \in \mathbb{N}\})$ muestra que Q_n es unión numerable de conjuntos finitos y por lo tanto es numerable por el Teorema 1.17. Es un ejercicio fácil ver que $\mathbb{Q} = \bigcup\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ de modo que podemos aplicar el Teorema 1.17 una vez más para concluir que $\mathbb{Q}$ es numerable. □

Hasta este momento sólo hemos manejado conjuntos infinitos numerables. ¿Será que todos los conjuntos infinitos son numerables? El siguiente teorema de Cantor muestra que hay muchos conjuntos infinitos no numerables.

TEOREMA 1.19 (Cantor). *Dado un conjunto A sea* $\exp(A) = \{P : P \subset A\}$. *Entonces* $|A| < |\exp(A)|$.

DEMOSTRACIÓN. Para todo $a \in A$ hagamos $f(a) = \{a\}$, es decir le asociamos a cada $a \in A$ el conjunto $f(a)$ cuyo único elemento es a. Es inmediato que la función $f : A \to \exp(A)$ es inyectiva y por lo tanto $|A| \leq |\exp(A)|$.

Para descartar la posibilidad de que $|A| = |\exp(A)|$ supongamos que existe una sobreyección $\varphi : A \to \exp(A)$. El conjunto $Q = \{a \in A :$

$a \notin \varphi(a)\}$ pertenece a $\exp(A)$ y por lo tanto existe un punto $x \in A$ tal que $\varphi(x) = Q$. Si $x \in Q$ entonces, por definición de Q, tenemos que $x \notin \varphi(x) = Q$ lo cual es una contradicción. de modo que $x \notin Q$ lo cual quiere decir que $x \in \varphi(x) = Q$ así que tenemos una contradicción final misma que comprueba que no puede existir una sobreyección de A sobre $\exp(A)$. $\square$

COROLARIO 1.20. *El conjunto* $\exp(\mathbb{N})$ *de todos los subconjuntos de* $\mathbb{N}$ *no es numerable.*

El lector seguramente notó que no dijimos nada sobre la situación cuando $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$ al mismo tiempo. Tendríamos que preguntarnos si en este caso tenemos que $|A| = |B|$ porque esto es cierto para los números reales. Sin embargo, pospusimos la discusión del tema porque la respuesta (que es positiva) constituye un famoso resultado de Schröder-Bernstein y su demostración requiere un esfuerzo considerable. De modo que cerraremos la primera clase con este hermoso teorema.

TEOREMA 1.21 (Schröder-Bernstein). *Para cualesquiera conjuntos A y B si existe una inyección de A en B y una inyección de B en A entonces existe una biyección entre A y B. En otras palabras, las desiguladades $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$ implican que $|A| = |B|$.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer, sin perder la generalidad, que $A \cap B = \varnothing$. Fijemos inyecciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$; si $B' = f(A)$ y $A' = g(B)$ entonces $f : A \to B'$ y $g : B \to A'$ son biyecciones y por lo tanto existen funciones inversas $f^{-1} : B' \to A$ y $g^{-1} : A' \to B$ mismas que son biyecciones (véase Ejercicio 1.11).

Hagamos $C_1 = g(B \setminus B')$; procediendo inductivamente, si $n \in \mathbb{N}$ y tenemos un conjunto $C_n \subset A$ hacemos $C_{n+1} = g(f(C_n))$. Esto nos brinda una sucesión $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de A; sea $C = \bigcup\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$. Observe primero que la definición del conjunto C muestra que $C_1 = g(B \setminus B') \subset g(B)$ y $C_{n+1} = g(f(C_n)) \subset g(B)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo cual

(1): $C \subset g(B) = A'$.

Resulta también que

(2): $f(g(C)) \subset C$, es decir, $f(g(x)) \in C$ para todo $x \in C$.

En efecto, si $x \in C$ entonces $x \in C_n$ para algún número $n \in \mathbb{N}$; de aquí, $f(g(x)) \in C_{n+1} \subset C$ y por lo tanto la propiedad (1) queda demostrada. Demostraremos adicionalmente que

(3): si $y \in B$ y $g(y) \notin C$ entonces $y \in B'$ y $f^{-1}(y) \notin C$.

Nótese primero que si $y \in B \setminus B'$ entonces $g(y) \in C_1 \subset C$ lo cual contradice nuestra hipótesis; de modo que $y \in B'$ y por lo tanto la función f^{-1} está definida en el punto y. Ahora, si $x = f^{-1}(y) \in C$ entonces $g(y) = g(f(x)) \in C$ por la propiedad (2); la contradictión obtenida muestra que la propiedad (3) está demostrada.

Dado cualquier punto $x \in A$ hagamos $\varphi(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in C$ (observe que la propiedad (1) implica que la función g^{-1} está definida en x); para todo $x \in A \setminus C$ hacemos $\varphi(x) = f(x)$. De manera que tenemos una función $\varphi : A \to B$; probemos que φ es una biyección.

Si $a \neq b$ y $a, b \in C$ entonces $g^{-1}(a) \neq g^{-1}(b)$ por ser g^{-1} inyectiva; de modo que $\varphi(a) = g^{-1}(a) \neq g^{-1}(b) = \varphi(b)$.

Si $a \neq b$ y $a, b \in A \setminus C$ entonces $f(a) \neq f(b)$ por ser la función f inyectiva; de modo que $\varphi(a) = f(a) \neq f(b) = \varphi(b)$.

Si $a \in C,\ b \in A \setminus C$ y $\varphi(a) = \varphi(b) = y$ entonces $y = g^{-1}(a) = f(b) \in B'$ y por lo tanto $a = g(y) = g(f(b)) \in C$. Si $a \in C_1$ entonces $y \in B \setminus B'$ lo cual es una contradicción. Si $a \in C_n$ para algún $n > 1$ entonces existe $a' \in C_{n-1}$ tal que $a = g(f(a'))$; consecuentemente, $g(f(a')) = g(f(b))$. Como la función $g \circ f$ es inyectiva (véase el Ejercicio 1.7*a*), resulta que $b = a' \in C$ lo cual también es una contradicción. Entonces $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ y quedó demostrado que φ es una función inyectiva.

Finalmente tomemos cualquier punto $y \in B$; si $x = g(y) \in C$, entonces $y = g^{-1}(x) = \varphi(x)$. Si $g(y) \notin C$ entonces $x = f^{-1}(y) \notin C$ por la propiedad (3) así que $y = f(x) = \varphi(x)$. De modo que para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $y = \varphi(x)$, es decir la función φ es sobreyectiva y por lo tanto es una biyección entre A y B. $\square$

Tarea de la Clase 1

La siguiente lista contiene preguntas de dificultad variable. La respuesta puede requerir un renglón o varias páginas así que no se desanime si no le sale la respuesta. Al fin que sólo intentando y fallando se aprende.

Problema 1.A. Demostrar que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Problema 1.B. Demostrar que si $|A| \leq |B|$, entonces $|\exp(A)| \leq \exp(B)|$. Deduzca de este hecho que $|A| = |B|$ implica que $|\exp(A)| = \exp(B)|$.

Problema 1.C. Observe que, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $S_x \subset \mathbb{Q}$ que converge a x. Pruebe que la función $\varphi : \mathbb{R} \to \exp(\mathbb{Q})$ dada por la asociación $x \to S_x$, es inyectiva y por lo tanto $|\mathbb{R}| \leq |\exp(\mathbb{N})|$.

Problema 1.D. Demuestre que $|\mathbb{R}| = |(a, b)|$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$.

Problema 1.E. Considere el conjunto $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}) = \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$ de todas las funciones de $\mathbb{N}$ a $\{0, 1\}$. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{N}$ hagamos $\chi_A(n) = 1$ si $n \in A$ y sea $\chi_A(n) = 0$ si $n \notin A$. Pruebe que la asociación $A \to \chi_A$ brinda una función inyectiva de $\exp(\mathbb{N})$ en $\mathrm{Fun}(\mathbb{N})$ y por lo tanto $|\exp(\mathbb{N})| \leq |\mathrm{Fun}(\mathbb{N})|$.

Problema 1.F. Dada una función $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{N})$ hagamos $\varphi(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(i)}{10^i}$. Pruebe que el número $\varphi(f)$ está bien definido para cada $f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{N})$

y la función $\varphi\colon \mathrm{Fun}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ es una inyección. Deduzca de aquí que $|\mathbb{R}| = |\exp(\mathbb{Q})| = |\exp(\mathbb{N})| = |\mathrm{Fun}(\mathbb{N})|$.

Problema 1.G. Demuestre que $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 1.H. Supongamos que A es un conjunto finito y $f\colon A \to A$ es una inyección. Probar que f es biyectiva.

Problema 1.I. Supongamos que A es un conjunto finito y $f\colon A \to A$ es una sobreyección. Probar que f es biyectiva.

Problema 1.J. Supongamos que $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ son biyeccciones. Probar que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Problema 1.K. Dadas funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ supongamos que $g \circ f$ es sobreyectiva. Probar que las funciones f y g también son sobreyectivas.

Problema 1.L. Dadas funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to C$ supongamos que $g \circ f$ es inyectiva. Probar que las funciones f y g también son inyectivas.

Problema 1.M. Supongamos que un conjunto A es no numerable y $B \subset A$ es numerable. Probar que $|A| = |A \setminus B|$.

Problema 1.N. Sea $\mathrm{Fun}(A) = \{f : A \to \{0,1\}\}$ para cualquier conjunto $A \neq \varnothing$. Demostrar que $|A| < |\mathrm{Fun}(A)|$.

Problema 1.O. Supongamos que $|A_n| \le |\mathbb{R}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que $|\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}| \le |\mathbb{R}|$.

Problema 1.P. Supongamos que para funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ se tiene que $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Probar que f es inyectiva y g es sobreyectiva. Dar un ejemplo que muestre que ninguna de las funciones f y g necesita ser biyección.

Problema 1.Q. Probar que una función $f\colon A \to B$ es inyectiva si y sólo si $f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$ para cualesquiera $P, Q \subset A$.

Problema 1.R. Un número $r \in \mathbb{R}$ se llama *algebraico* si existe un polinomio $p(x)$ con coeficientes racionales tal que r es una raíz de $p(x)$. Probar que el conjunto de los números algebraicos es numerable.

Problema 1.S. Dados conjuntos A y B sea $A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$; el conjunto $A \times B$ se llama *el producto* de A y B y se denota por $A \times B$. Probar que si A y B son numerables entonces $A \times B$ también es numerable.

Problema 1.T. Sabiendo que $|A| = |A'|$ y $|B| = |B'|$ probar que se tiene la igualdad $|A \times B| = |A' \times B'|$.

Problema 1.U. Probar que si $|A| \le |\mathbb{R}|$ y $|B| \le |\mathbb{R}|$ entonces $|A \times B| \le |\mathbb{R}|$.

Problema 1.V. Para cualesquiera conjuntos A y B sea A^B el conjunto de todas las funciones de B en A. Sabiendo que A, B y C son conjuntos mutuamente ajenos demostrar que $|A^B \times A^C| = |A^{B \cup C}|$.

Problema 1.W. Dados conjuntos mutuamente ajenos A, B y C demostrar que $|(A^B)^C| = |A^{B \times C}|$.

Problema 1.X. Demostrar que $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

Problema 1.Y. Dado un conjunto B supongamos que $|A_i| < |B|$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Probar que $|\bigcup\{A_i : i \in \mathbb{N}\}| < |B^{\mathbb{N}}|$.

Problema 1.Z. Sabiendo que $\mathbb{R} = \bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A_n| = |\mathbb{R}|$.

Capítulo 2

Espacios topológicos generales

Tenían que pasar más de dos siglos desde la época de Newton y Leibnitz hasta la aparición de los trabajos fundamentales de Cauchy, para que la noción de "infinitamente pequeño" adquiriera una descripción rigurosa. De modo que se pusieron los cimientos sólidos para el desarrollo de la Geometría y del Análisis. A principios del siglo XX Fréchet y Hausdorff descubrieron el concepto que absorbió todo lo necesario para poder manejar con precisión impecable la continuidad en todas las situaciones imaginables. Lo más sorprendente de este descubrimiento es la sencillez y universalidad del concepto mencionado, mismo que llegó a llamarse *espacio topológico*.

Definición 2.1. Un espacio topológico es un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ una familia de subconjuntos de X para la cual se satisfacen las siguientes condiciones:

(*i*) $\varnothing \in \tau$ y $X \in \tau$;
(*ii*) si $U \in \tau$ y $V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$;
(*iii*) si $\mathcal{U} \subset \tau$, entonces $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Los elementos de X se llaman *puntos* de (X, τ) y los elementos de la familia τ se llaman subconjuntos *abiertos* del espacio (X, τ). Recuérdese que el conjunto $\bigcup \mathcal{U} = \{x \in X : \text{existe un } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } x \in U\}$ es la unión de la familia $\mathcal{U}$.

Acuerdo 2.2. Para referirnos a un espacio topológico (X, τ) seguiremos la práctica común de escribir simplemente X en lugar de (X, τ). Si X es un espacio topológico entonces su topología se denota por $\tau(X)$; además, $\tau^*(X)$ es la familia de todos los subconjuntos abiertos no vacíos de X.

En los siguientes ejemplos veremos que muchos objetos de estudio en Matemáticas son espacios topológicos.

Ejemplo 2.3. Dado cualquier conjunto X sea $\tau = \exp(X) = \{Y : Y \subset X\}$, es decir, la familia τ consiste de todos los subconjuntos de X. Es trivial que se cumplen las condiciones (*i*)–(*iii*) de la Definición 2.1 y por lo tanto (X, τ) es un espacio topológico; la topología τ (que se llama *discreta*) es la máxima posible en el conjunto X ya que cualquier otra topología en X estaría contenida en τ.

EJEMPLO 2.4. Dado cualquier conjunto X sea $\tau = \{\varnothing, X\}$, es decir, la familia τ sólo consiste de los dos subconjuntos obligatorios de X. Es fácil cerciorarse de que se cumplen las condiciones (i)–(iii) de la Definición 2.1 y por lo tanto (X, τ) es un espacio topológico; la topología τ (que se llama *antidiscreta*) es la mínima posible en el conjunto X ya que τ estaría contenida en cualquier otra topología en X.

EJEMPLO 2.5. En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales consideremos la familia $\tau_{\mathcal{N}} = \{\varnothing\} \cup \{U \subset \mathbb{R} :$ para todo $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U\}$. Es un buen ejercicio para el lector comprobar que $\tau_{\mathcal{N}}$ es una topología en el conjunto $\mathbb{R}$ misma que se llama *la topología natural* de $\mathbb{R}$. En todas las afirmaciones futuras, si $\mathbb{R}$ se considera como espacio topológico, esto significa que trae la topología natural, es decir se identifica con el espacio $(\mathbb{R}, \tau_{\mathcal{N}})$. De hecho, la topología natural de $\mathbb{R}$ está detras de casi todos los teoremas del Análisis que tienen que ver con $\mathbb{R}$ y funciones reales.

EJEMPLO 2.6. En el conjunto $\mathbb{R}^n$ consideremos la familia $\tau^n_{\mathcal{N}} = \{\varnothing\} \cup \{U \subset \mathbb{R}^n :$ para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier punto $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ si $\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} < \varepsilon$ entonces $y \in U\}$. La familia $\tau^n_{\mathcal{N}}$ es una topología en el conjunto $\mathbb{R}^n$ misma que se llama *la topología natural* de $\mathbb{R}^n$. En todas las afirmaciones futuras, si $\mathbb{R}^n$ se considera como espacio topológico, esto significa que trae la topología natural, es decir se identifica con el espacio $(\mathbb{R}^n, \tau^n_{\mathcal{N}})$. La topología natural de $\mathbb{R}$ juega un papel fundamental en casi todos los resultados del Análisis que tienen que ver con $\mathbb{R}^n$ y funciones reales de varias variables.

DEMOSTRACIÓN. Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ vamos a necesitar el conjunto $B_\varepsilon(x) = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2} < \varepsilon\}$. En esta terminología un conjunto no vacío $U \subset \mathbb{R}^n$ peretence a $\tau^n_{\mathcal{N}}$ si y sólo si para cada $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset U$.

Se supuso que el conjunto vacío es abierto y para demostrar que $\mathbb{R}^n$ lo es es suficiente notar que, para checar que se cumple la definición, se puede tomar $\varepsilon = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sean $U, V \in \tau^n_{\mathcal{N}}$; si $U \cap V = \varnothing$, entonces $U \cap V \in \tau^n_{\mathcal{N}}$. Si $W = U \cap V \neq \varnothing$, tomemos cualquier $x \in W$. Existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tales que $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U$ y $B_{\varepsilon_2}(x) \subset V$. Haciendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ vemos que las contenciones $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_1}(x) \cap B_{\varepsilon_2}(x) \subset U \cap V = W$ implican que $B_\varepsilon(x) \subset W$ y con eso quedó demostrado que la intersección de cualesquiera dos elementos de $\tau^n_{\mathcal{N}}$ pertence a $\tau^n_{\mathcal{N}}$.

Ahora si $\mathcal{U} \subset \tau^n_{\mathcal{N}}$ tomemos cualquier $x \in \bigcup \mathcal{U}$. Existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Como $U \in \tau^n_{\mathcal{N}}$, podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ para el cual $B_\varepsilon(x) \subset U$. Por lo tanto, $B_\varepsilon(x) \subset U \subset \bigcup \mathcal{U}$ lo cual prueba que $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$. □

En el Análisis es de suma importancia el concepto de *espacio métrico*; resulta que todas las propiedades de espacios métricos que tienen que ver con la continuidad se deben a las propiedades de una topología que surge de manera natural en cualquier espacio métrico.

DEFINICIÓN 2.7. Dado un conjunto X una función $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ se llama *métrica en X* si se cumplen las siguientes condiciones (llamadas *los axiomas* de métrica).

(*i*) $\rho(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$;
(*ii*) $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
(*iii*) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ para todos $x, y \in X$;
(*iv*) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ para cualesquiera $x, y, z \in X$.

El par (X, ρ) se llama *espacio métrico* y con frecuencia se denota simplemente por X. Para cualesquiera puntos $x, y \in X$ el número $\rho(x, y)$ se percibe intuitivamente como *la distancia* entre x y y. De modo que el concepto de espacio métrico es una generalización de las estructuras matemáticas y de la vida real en las cuales existe la noción de distancia entre dos puntos. La propiedad (iii) se llama *el axioma de la simetría de la distancia* y la propiedad (iv) es *el axioma del triángulo*.

EJERCICIO 2.8. Supongamos que (X, ρ) es un espacio métrico; si $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ entonces el conjunto $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ se llama *la bola de radio ε centrada en el punto x*. La familia $\tau(\rho) = \{\varnothing\} \cup \{U \subset X : \text{para todo } x \in U \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } B(x, \varepsilon) \subset U\}$ es una topología en X y se dice que $\tau(\rho)$ está generada por la métrica ρ. Cualquier espacio métrico se va a considerar con la topología generada por su métrica.

EJERCICIO 2.9. Hagamos $\rho(x, y) = |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Probar que ρ es una métrica en $\mathbb{R}$ que genera la topología natural de $\mathbb{R}$.

EJERCICIO 2.10. Dados puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ del espacio $\mathbb{R}^n$ hagamos $\rho_n(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Entonces ρ_n es una métrica en $\mathbb{R}^n$ que genera la topología natural de $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIO 2.11. Si X es un conjunto arbitrario hagamos $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$ y $d(x, y) = 1$ para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Entonces d es una métrica en X que genera la topología discreta en X.

El siguiente espacio topológico es un clásico objeto de estudio en el Análisis Funcional.

EJEMPLO 2.12. Sea $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$; denotemos por $C(I)$ el conjunto de todas las funciones reales continuas en el segmento I. Para todas $f, g \in C(I)$ hagamos $\rho_u(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}$. Entonces el número $\rho_u(f,g)$ está bien definido para cualesquiera $f, g \in C(I)$ y la función ρ_u es una métrica (misma que se llama *la métrica uniforme*) en $C(I)$. La topología generada por la métrica uniforme se llama *la topología uniforme* en $C(I)$.

DEMOSTRACIÓN. Dadas $f, g \in C(I)$, la función $h = f - g$ es continua. Esto significa que $h(I)$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$. De aquí se sigue que la función ρ_u está bien definida, o sea que $\rho_u(f,g) < \infty$ para todas $f, g \in C(I)$. Es obvio que $\rho_u(f,g) = \rho_u(g,f) \geq 0$ para cualesquiera $f, g \in C(I)$. Si $\rho_u(f,g) = 0$, entonces $|f(x) - g(x)| = 0$ para todo $x \in I$. Esto quiere decir que $f(x) = g(x)$ para cada $x \in I$, así que $f = g$.

Por último, sean $f, g, h \in C(I)$. Dado un $x \in I$ se tiene que

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq \rho_u(f,g) + \rho_u(g,h).$$

De modo que para todo $x \in X$ se cumple $|f(x) - h(x)| \leq \rho_u(f,g) + \rho_u(g,h)$, así que $\rho_u(f,h) = \sup\{|f(x) - h(x)| : x \in I\} \leq \rho_u(f,g) + \rho_u(g,h)$. Con esto se acaba de demostrar que d es una métrica en $C(I)$. $\square$

El siguiente método brinda nuevos ejemplos de espacios a partir de un solo espacio X; dichos ejemplos se llaman subespacios de X.

EJERCICIO 2.13. Supongamos que X es un espacio topológico y $Y \subset X$. La familia $\tau_Y^X = \{U \cap Y : U \in \tau(X)\}$ es una topología en Y misma que se llama la topología inducida en Y de X o la topología de subespacio de X.

EJERCICIO 2.14. Supongamos que X es un espacio topológico y $Y \subset Z \subset X$. Entonces $\tau_Y^X = (\tau_Z^X)_Y^Z$, es decir, la topología inducida en Y de X coincide con la topología inducida en Y de Z cuando Z trae la topología inducida de X.

Los ejercicios 2.13 y 2.14 muestran que ya tenemos una infinidad de ejemplos de espacios topológicos obtenidos como subespacios del espacio $\mathbb{R}$.

Para analizar espacios generales necesitamos varias herramientas adicionales.

DEFINICIÓN 2.15. Dado un espacio topológico X una familia $\mathcal{B} \subset \tau(X)$ se llama *base* del espacio X si para cada $U \in \tau(X)$ existe una familia $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup \mathcal{U}'$. En otras palabras, una familia $\mathcal{B}$ de abiertos de X es una base de X si todo subconjunto abierto de X es unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$.

DEFINICIÓN 2.16. Si X es un espacio topológico entonces una familia $\mathcal{S} \subset \tau(X)$ se llama *subbase* del espacio X la familia $\bigwedge \mathcal{S}$ de todas las intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{S}$ es una base en X.

Los conceptos de base y de subbase de un espacio X son útiles ya que la topología de X puede ser demasiado grande para visualizarse mientras bases y subbases, aparte de representar bastante bien a la topología, podrían ser lo suficientemente pequeñas para controlarlas trabajando con el espacio.

PROPOSICIÓN 2.17. *Una familia $\mathcal{B}$ de abiertos de un espacio X es una base de X si y sólo si para todo $x \in X$ y todo abierto $U \subset X$ para el cual $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathcal{B}$ es una base en X fijemos $x \in X$ y un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$. Existe una familia $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tal que $\bigcup \mathcal{B}' = U$ y por lo tanto $x \in B$ para algún $B \in \mathcal{B}'$. De modo que $x \in B \subset \bigcup \mathcal{B}' = U$ así que queda demostrada la necesidad.

Ahora, si $\mathcal{B}$ es una familia que tiene la propiedad formulada en la hipótesis tomemos cualquier abierto $U \subset X$. Para todo $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ para el cual $x \in B_x \subset U$; la familia $\mathcal{B}' = \{B_x : x \in U\}$ está contenida en $\mathcal{B}$ y $\bigcup \mathcal{B}' = U$ así que $\mathcal{B}$ es una base en X. □

EJERCICIO 2.18. Si X es un espacio discreto entonces la familia $\{\{x\} : x \in X\}$ es una base en X.

EJERCICIO 2.19. La familia $\{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q}\}$ de los intervalos racionales es una base numerable en $\mathbb{R}$.

EJERCICIO 2.20. Si (X, ρ) es un espacio métrico entonces la familia $\{B(x, \varepsilon) : x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ de todas las bolas de X es una base en X.

EJERCICIO 2.21. Si $\mathcal{S}_0 = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{S}_1 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ son las familias de los rayos derechos e izquierdos respectivamente de la recta $\mathbb{R}$ entonces la familia $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ es una subbase de $\mathbb{R}$.

Los espacios con base numerable son de importancia no sólo en Topología sino también en muchas otras áreas de las Matemáticas. A continuación veremos que muchos espacios clásicos (entre ellos los espacios $\mathbb{R}^n$ y todos su subespacios) tienen base numerable. Por lo pronto demostraremos un resultado general muy útil sobre las bases numerables.

TEOREMA 2.22. *Si un espacio topológico X tiene base numerable entonces para cualquier base $\mathcal{B}$ en X existe una subfamilia numerable*

$\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{B}'$ también es una base de X. En otras palabras, si X tiene base numerable entonces cualquier base de X (que no necesita ser numerable) contiene una base numerable.

Demostración. Fijemos una base arbitraria $\mathcal{B}$ en el espacio X; por hipótesis, X tiene una base numerable $\mathcal{N}$; sea $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de $\mathcal{N}$. Digamos que un par $p = (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es *adecuado* si existe un conjunto $B_p \in \mathcal{B}$ tal que $U_n \subset B_p \subset U_m$. Si $P \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es el conjunto de los pares adecuados y $\mathcal{B}' = \{B_p : p \in P\}$ entonces la correspondencia $p \to B_p$ nos brinda una sobreyección de P sobre $\mathcal{B}'$. Se sigue de $P \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que $|P| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ así que P es numerable y por lo tanto $\mathcal{B}'$ también lo es.

Finalmente, si $x \in V \in \tau(X)$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_m \subset V$ (véase la Proposición 2.17). Como $\mathcal{B}$ es base de X existe $B \in \mathcal{B}$ para el cual $x \in B \subset U_m$. Recordando una vez más que $\mathcal{N}$ es también una base podemos hallar $n \in \mathbb{N}$ con $x \in U_n \subset B$. De modo que $U_n \subset B \subset U_m$ por lo cual el par $p = (n, m)$ es adecuado y, por lo tanto, $U_n \subset B_p \subset B_m$. Tenemos que $B_p \in \mathcal{B}'$ y $x \in B_p \subset U_m \subset V$ lo que muestra que $\mathcal{B}'$ satisface la hipótesis de la Proposición 2.17 y por lo tanto $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ es una base numerable en X. $\square$

Vamos a necesitar dos herramientas adicionales para analizar los espacios topológicos arbitrarios: la cerradura y el interior. La cerradura formaliza la noción intuitiva de "cercanía" de un punto a un conjunto y el interior de un conjunto consiste de los puntos "lejanos" del complemento del conjunto.

Definición 2.23. Un conjunto F de un espacio topológico X se llama *cerrado* si $X \setminus F$ es abierto en X. En otras palabras, los conjuntos cerrados de X son los complementos de los abiertos de X.

Definición 2.24. Dado un conjunto A en un espacio topológico X el conjunto $\overline{A} = \bigcap\{F : F$ es cerrado en X y $A \subset F\}$ se llama la cerradura de A en X. Si hay necesidad de precizar en qué espacio se toma la cerradura la vamos a denotar por $\mathrm{Cl}_X(A)$.

Definición 2.25. Si A es un subconjunto de un espacio topológico X entonces el conjunto $\mathrm{Int}(A) = \bigcup\{U : U$ es abierto y $U \subset A\}$ se llama *el interior* del conjunto A. Si tenemos que enfatizar el espacio en el que se toma el interior lo denotamos por $\mathrm{Int}_X(A)$.

Observe que, técnicamente, la cerradura de un conjunto A es el cerrado mínimo que contiene a A; por otra parte, el interior de A es el abierto máximo contenido en A.

Proposición 2.26. *Para todo espacio topológico X y todo $A \subset X$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(*i*) $x \in \overline{A}$;
(*ii*) *si* $x \in U \in \tau(X)$ *entonces* $U \cap A \neq \varnothing$.

DEMOSTRACIÓN. Dado un $x \in \overline{A}$, supongamos que $U \cap A = \varnothing$ para algún abierto $U \ni x$. Se sigue de $A \subset X \setminus U$ que el conjunto cerrado $X \setminus U$ contiene a A. Pero $\overline{A}$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A, así que $\overline{A} \subset X \setminus U$. Concluimos que $U \cap \overline{A} = \varnothing$ lo que es una contradicción con $x \in U$ y $x \in \overline{A}$. Por lo tanto, quedó demostrada la implicación $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Sea $x \in X$ un punto para el cual se cumple (ii). Para probar que $x \in \overline{A}$, tomemos un conjunto cerrado $F \supset A$. Como $U = X \setminus F$ es abierto y $U \cap A = \varnothing$, no puede ser que $x \in U$. Entonces, $x \in F$, y por ser F arbitrario, el punto x pertenece a todo conjunto cerrado, que contiene a A y por consiguiente a $\overline{A}$. □

EJERCICIO 2.27. Dado un espacio topológico X y $A \subset X$ probar que $x \in \mathrm{Int}(A)$ si y sólo si existe $U \in \tau(X)$ tal que $x \in U \subset A$.

Tarea de la Clase 2.

Esta tarea presenta métodos adicionales para desarrolar el tema de la Clase 2. Sus enunciados se van a usar en las Clases posteriores así que es imprescindible un trabajo serio sobre las preguntas que siguen.

Problema 2.A. Dado un espacio X probar que
(*i*) la intersección de cualquier familia de subconjuntos cerrados de X es un conjunto cerrado en X;
(*ii*) la unión de cualquier familia finita de cerrados de X es un subconjunto cerrado de X.

Problema 2.B. Para cualquier espacio topológico X demostrar que
(*i*) un conjunto F es cerrado en X si y sólo si $\overline{F} = F$;
(*ii*) si $A \subset B \subset X$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$;
(*iii*) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ para todo $A \subset X$;
(*iv*) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ para todos $A, B \subset X$;

Problema 2.C. Para cualquier espacio topológico X demostrar que
(*i*) un conjunto $U \subset X$ es abierto si y sólo si $\mathrm{Int}(U) = U$;
(*ii*) si $A \subset B \subset X$ entonces $\mathrm{Int}(A) \subset \mathrm{Int}(B)$;
(*iii*) $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$ para todo $A \subset X$;
(*iv*) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$ para todos $A, B \subset X$.

Problema 2.D. Dado un espacio topológico X demostrar que $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \overline{X \setminus A}$ para cualquier $A \subset X$.

Problema 2.E. Dado un espacio topológico X demostrar que $\overline{A} = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$ para cualquier $A \subset X$.

Problema 2.F. Sea X un espacio topológico. Demsotrar que si U y V son abiertos en X y $\overline{U} = \overline{V} = X$ entonces $\overline{U \cap V} = X$.

Problema 2.G. Supongamos que X es un conjunto sin topología y $\mathcal{B}$ es una familia de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:

(B1) $\bigcup \mathcal{B} = X$;

(B2) si $U, V \in \mathcal{B}$ y $x \in U \cap V$ entonces existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset U \cap V$.

Probar que

(a) las uniones de todas las subfamilias de $\mathcal{B}$ forman una topología τ en X tal que $\mathcal{B}$ es una base de (X, τ).

(b) La topología τ es única en el sentido de que para cualquier topología μ en el conjunto X si $\mathcal{B}$ es una base de (X, μ) entonces $\mu = \tau$.

Problema 2.H. Supongamos que X es un conjunto sin topología y $\mathcal{S}$ es una familia de subconjuntos de X tal que $\bigcup \mathcal{S} = X$. Probar que existe una única topología τ en X tal que $\mathcal{S}$ es una subbase de (X, τ).

Problema 2.I. Probar que el espacio $\mathbb{R}^n$ tiene base numerable para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2.J. Sea τ la topología discreta en $\mathbb{R}$. Probar que el espacio $(\mathbb{R}, \tau)$ no tiene subbase numerable.

Problema 2.K. Sea $\{\tau_t : t \in T\}$ una familia de topologías en un conjunto X. Demostrar que $\tau = \bigcap \{\tau_t : t \in T\}$ es una topología en X.

Problema 2.L. Dar un ejemplo de un conjunto X y dos topologías τ_0, τ_1 en X tales que $\tau_0 \cup \tau_1$ no sea una topología en X.

Problema 2.M. Probar que todo conjunto abierto de $\mathbb{R}$ es unión numerable de intervalos disjuntos.

Problema 2.N. Probar que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ los conjuntos $\{a\}$, $[a, b]$ y $[a, +\infty)$ son cerrados en $\mathbb{R}$.

Problema 2.O. Demostrar que $\mathbb{N}$ es un subespacio discreto y cerrado en $\mathbb{R}$.

Problema 2.P. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ demostrar que $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A$ que converge a x en el sentido del Análisis.

Problema 2.Q. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ demostrar que $x \in \mathrm{Int}(A)$ si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$.

Problema 2.R. Demostrar que $\mathbb{Q}$ no es cerrado ni abierto en $\mathbb{R}$ y, además, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Problema 2.S. Supongamos que (X, d) es un espacio métrico y consideremos la función d_0 definida por la fórmula $d_0(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ para cualesquiera $x, y \in X$. Demostrar que d_0 también es una métrica en X que genera la misma topología en X, es decir, $\tau(d) = \tau(d_0)$.

Problema 2.T. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sea $C[a, b]$ el conjunto de todas las funciones continuas en el segmento $[a, b]$. Para cualesquiera $f, g \in C[a, b]$ hagamos $\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt}$; demostrar que ρ es una métrica en $C[a, b]$.

Problema 2.U. Para cualesquiera conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ podemos formar el conjunto $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Probar que si $U \subset \mathbb{R}$ es abierto entonces $A + U$ es abierto para todo $A \subset \mathbb{R}$.

Problema 2.V. Un espacio X se llama separable si existe un conjunto numerable $A \subset X$ tal que $\overline{A} = X$. Probar que $\mathbb{R}^n$ es separable para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2.W. Demostrar que $\mathbb{R}$ con la topología discreta no es separable.

Problema 2.X. Dado un espacio métrico (X, d) demostrar que X es separable si y sólo si tiene una base numerable.

Problema 2.Y. Considere la familia $\mathcal{B}_s = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Demuestre que existe una única topología τ_s en $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}_s$ es base de $(\mathbb{R}, \tau_s)$. El espacio $S = (\mathbb{R}, \tau_s)$ se llama la flecha de Sorgenfrey; demuestre que el espacio S es separable.

Problema 2.Z. Demuestre que la flecha S de Sorgenfrey no tiene base numerable. Deduzca de este hecho que no existe métrica en $\mathbb{R}$ que genere la topología de la flecha de Sorgenfrey.

Capítulo 3

Funciones y continuidad

Es imposible sobreestimar la importancia de las funciones continuas tanto en matemáticas como en sus aplicaciones. En particular, en ningún curso de topología se puede prescindir de este tema. Además, la topología brinda el trato más amplio y general de las funciones y de la continuidad por lo que este material es aplicable en cualquier área de las matemáticas.

A partir de este momento vamos a seguir el ejemplo del uso en inglés de la palabra "map" en lugar de "function" en el caso de funciones entre espacios topológicos arbitrarios. De modo que vamos a utilizar con frecuencia el término "mapeo" en vez de "función" cuando se trata de funciones entre espacios arbitrarios reservando la palabra "función" para funciones reales.

DEFINICIÓN 3.1. Dados espacios topológicos X, Y y una función $f\colon X \to Y$, se dice que f es continua si y sólo si para cada $U \in \tau(Y)$ el conjunto $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$ es abierto en X.

DEFINICIÓN 3.2. Supongamos que X es un espacio topológico y $A \subset X$; un conjunto $B \subset X$ se llama *vecindad de* A si $A \subset \operatorname{Int}(B)$. Si $x \in \operatorname{Int}(B)$ entonces decimos que B es una vecindad del punto x. Si B es abierto entonces lo llamamos *vecindad abierta* (de A o del punto x según el caso).

EJERCICIO 3.3. Para todo espacio topológico X probar que un conjunto $A \subset X$ es abierto en X si y sólo si A es vecindad de cada punto $x \in A$.

DEFINICIÓN 3.4. Sean X y Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ un mapeo. Se dice que f es continuo en un punto $x \in X$ si para todo $V \in \tau(Y)$ tal que $f(x) \in V$ existe un conjunto $U \in \tau(X)$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subset V$.

TEOREMA 3.5. *Si X y Y son espacios topológicos y $f\colon X \to Y$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *el mapeo f es continuo;*

2. *existe una base* $\mathcal{B}$ *en* Y *tal que* $f^{-1}(U)$ *es abierto en* X *para cada* $U \in \mathcal{B}$*;*
3. *existe una subbase* $\mathcal{B}$ *en* Y *tal que* $f^{-1}(U)$ *es abierto en* X *para cada* $U \in \mathcal{B}$*;*
4. f *es continua en cada* $x \in X$*;*
5. *si* F *es cerrado en* Y*, entonces* $f^{-1}(F)$ *es cerrado en* X*;*
6. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ *para todo* $A \subset X$*;*
7. $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ *para todo* $B \subset Y$*;*
8. $f^{-1}(\mathrm{Int}(B)) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}(B))$ *para todo* $B \subset Y$*.*

Para presentar los enunciados (6)–(8) con toda rigurosidad, debería uno escribir $f(\mathrm{Cl}_X(A)) \subset \mathrm{Cl}_Y(f(A))$ *en (6),* $\mathrm{Cl}_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}_Y(B))$ *en (7) y en el inciso (8) afirmar que* $f^{-1}(\mathrm{Int}_Y(B)) \subset \mathrm{Int}_X(f^{-1}(B))$*. Sin embargo, para no volver demasiado cargadas las fórmulas, utilizaremos la misma barra para cerraduras y el mismo símbolo* Int *para interiores en espacios diferentes si esto no causa confusión.*

Demostración. Es evidente, que (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3). Sea $\mathcal{B}$ una subbase de Y como en la condición (3). Tomemos cualquier punto $x_0 \in X$. La familia $\mathcal{B}$ es subbase en Y, así que, dado un $U \in \tau(Y)$ tal que $y_0 = f(x_0) \in U$, podemos encontrar $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{B}$ para los cuales se tiene que $y_0 \in V_1 \cap \ldots \cap V_n \subset U$.

El conjunto $W = \bigcap\{f^{-1}(V_i) : i = 1, \ldots, n\}$ es abierto por ser una intersección finita de abiertos. Además, $x \in W$ y $f(W) \subset V_1 \cap \ldots \cap V_n \subset U$. Esto demuestra la continuidad de f en el punto x_0. Como se tomó x_0 arbitrariamente, concluimos que (3) $\Longrightarrow$ (4).

Si F es cerrado en Y, entonces el conjunto $U = Y \setminus F$ es abierto en Y y $f(x) \in U$ para cada $x \in X \setminus f^{-1}(F)$. Por ser f continua en el punto x, existe $V_x \in \tau(X)$ tal que $x \in V_x$ y $f(V_x) \subset U$. Esto implica que $V_x \cap f^{-1}(F) = \varnothing$, ó sea que $V_x \subset X \setminus f^{-1}(F)$. Resulta que $X \setminus f^{-1}(F) = \bigcup\{V_x : x \in X \setminus f^{-1}(F)\}$ y por lo tanto $X \setminus f^{-1}(F)$ es abierto en X lo que muestra que $f^{-1}(F)$ es cerrado. Esto prueba que (4) $\Longrightarrow$ (5).

Supongamos que se cumple (5) y fijemos un $A \subset X$. El conjunto $\overline{f(A)}$ es cerrado en Y y por lo tanto $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es cerrado en X. Además, $A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ lo que implica $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Aplicando f a ambas partes de esta contención, obtenemos (6).

Para establecer que (6) $\Rightarrow$ (7) denotemos el conjunto $f^{-1}(B)$ por A. Aplicando (6) al conjunto A vemos que $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B}$ y por lo tanto, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Como $\mathrm{Int}(B) = Y \setminus \overline{Y \setminus B}$, tenemos que $f^{-1}(\mathrm{Int}_Y(B)) = f^{-1}(Y \setminus \overline{Y \setminus B}) = X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B})$; se sigue de (7) que $f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \supset \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} = \overline{X \setminus f^{-1}(B)}$ así que $f^{-1}(\mathrm{Int}_Y(B)) = X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subset X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \mathrm{Int}_X(f^{-1}(B))$, y por lo tanto, quedó demostrada la implicación (7) $\Rightarrow$ (8).

Por último, tomemos un $U \in \tau(Y)$. Haciendo uso de (8), vemos que

$$f^{-1}(\operatorname{Int}_Y(U)) = f^{-1}(U) \subset \operatorname{Int}_X(f^{-1}(U)) \subset f^{-1}(U).$$

De aquí se sigue que $\operatorname{Int}_X(f^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$ lo que implica que $f^{-1}(U)$ es abierto en X. □

PROPOSICIÓN 3.6. *Sean X y Y espacios topológicos.*

1. *Si $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces para todo $Z \subset X$ la función $g = f|Z\colon Z \to f(Z)$ es continua;*
2. *si Z es un espacio topológico y los mapeos $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son continuos, entonces el mapeo $h = g \circ f\colon X \to Z$ es continuo;*
3. *si $Z \subset Y$ y $f\colon X \to Z$ es una función continua, entonces f es continua considerada como función de X en Y.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea x un punto arbitrario de Z. Dada una vecindad abierta U de $f(x)$ en $f(Z)$ tomemos un $V \in \tau(Y)$ tal que $f(x) \in V \cap f(Z) = U$. Como f es continua en el punto x, existe $W \in \tau(X)$ tal que $x \in W$ y $f(W) \subset V$. Como consecuencia tenemos que $g(W \cap Z) = f(W \cap Z) \subset f(W) \cap f(Z) \subset V \cap f(Z) = U$. Entonces, $W_1 = W \cap Z$ es una vecindad abierta de x en Z para la cual se cumple $g(W_1) \subset U$. Esto quiere decir que g es continua en x.

Para demostrar (2), tomemos cualquier conjunto $U \in \tau(Z)$. Entonces, $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. Puesto que el mapeo g es continuo, tenemos que $V = g^{-1}(U) \in \tau(Y)$. Ahora, usando la continuidad de f concluimos que $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1}(V)$ es abierto en X.

(3) Si $U \in \tau(Y)$ entonces $f^{-1}(U) = f^{-1}(U \cap Z) \in \tau(X)$ debido a que $f\colon X \to Z$ es continua. □

PROPOSICIÓN 3.7.

1. *Si X es un espacio discreto, entonces toda función en X es continua.*
2. *Sean X y Y espacios topológicos arbitrarios. Supongamos que $f\colon X \to Y$ es una constante, o sea que existe un $y_0 \in Y$ tal que $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$. Entonces la función f es continua;*
3. *Una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua ($\mathbb{R}$ se considera con la topología natural) si y sólo si f es continua en cada punto $a \in \operatorname{dom}(f)$ en el sentido del análisis tradicional (o sea $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$).*

DEMOSTRACIÓN. (1) Si $f\colon X \to Y$ es una función y $U \in \tau(Y)$, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X porque lo son todos los subconjuntos de X.

(2) Para todo $U \subset Y$ se tiene que $f^{-1}(U) = X$ si $y_0 \in U$, y $f^{-1}(U) = \varnothing$ si $y_0 \notin U$. Resulta que la imagen inversa de cualquier conjunto (y en particular, de cualquier conjunto abierto) es abierta.

(3) Supongamos que f es continua en el sentido del Análisis. Tomemos un $x \in \mathbb{R}$ y un abierto $U \ni f(x)$. Según la definición de la topología natural, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset U$. La condición (3) nos garantiza la existencia de un $\delta > 0$ tal que $f((x - \delta, x + \delta)) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset U$, y esto significa exactamente que f es continua en el punto x en el sentido topológico.

Por otra parte, si f es continua en el sentido topológico, $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe un subconjunto $U \in \tau(\mathbb{R})$, tal que $x \in U$ y tenemos la contención $f(U) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Recordando otra vez la definición de la topología natural de $\mathbb{R}$, concluimos que existe un $\delta > 0$ tal que $(x - \delta, x + \delta) \subset U$. Es fácil verificar que δ es como requiere la definición de la continuidad del Análisis. □

Definición 3.8. Sea X un conjunto. Si f, g son funciones de X en $\mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces podemos definir las funciones $f + g$, $f \cdot g$ y $\lambda \cdot f$ de X en $\mathbb{R}$ de la sigueinte manera: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ para todo $x \in X$. Si, además, para todo $x \in X$ se tiene que $g(x) \neq 0$, entonces haciendo $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ para cada $x \in X$ definimos la función $\frac{f}{g}$.

Es evidente, que $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ y $\lambda \cdot f$ son funciones de X en $\mathbb{R}$. Cabe observar, que estas funciones se definieron en cada punto de X por su respectiva fórmula. Notemos también que la definición tiene sentido, porque en las partes derechas se suman, se dividen, o se multiplican los números reales.

Teorema 3.9. *Sea X un espacio topológico. Supongamos que f, g son funciones de X en $\mathbb{R}$ (que se considera como espacio topológico con la topología natural). Si f y g son continuas, entonces lo son $f + g$, $f \cdot g$ y $\lambda \cdot f$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Si, además, $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, entonces la función $\frac{f}{g}$ también es continua.*

Demostración. Fijemos un punto $x_0 \in X$ para demostrar que las funciones $(f + g)$, $(\lambda \cdot f)$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ son continuas en x_0.

Fijemos un $\varepsilon > 0$. Debido a la continuidad de las funciones f y g, existen vecindades abiertas U y V del punto x_0 tales que $f(U) \subset (f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2})$ y $g(V) \subset (g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2})$. El conjunto $W = U \cap V$ es una vecindad abierta de x_0. Para verificar que $(f + g)(W) \subset ((f + g)(x_0) - \varepsilon, (f + g)(x_0) + \varepsilon)$ tomemos cualquier punto $x \in W$. Entonces

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| &= |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|. \end{aligned}$$

Acordándonos que $x \in W$, concluimos que $x \in U$ y $x \in V$ y por lo tanto $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. De aquí se sigue que

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

con lo que quedó demostrada la continuidad de $f + g$.

Para establecer la continuidad de $\lambda \cdot f$ en x_0, consideremos dos posibilidades:

(a) $\lambda = 0$. En este caso $(\lambda \cdot f)(x) = 0$ para todo $x \in X$ y es claro que $\lambda \cdot f$ es continua.

(b) $\lambda \neq 0$. Como f es continua en x_0, existe una vecindad abierta U del punto x_0 tal que $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ para todo $x \in U$. Ahora, si $x \in U$, entonces $|(\lambda \cdot f)(x) - (\lambda \cdot f)(x_0)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(x_0)| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$ y esto demuestra que $\lambda \cdot f$ es continua en x_0.

Tratandose de la función $f \cdot g$, si $K = |f(x_0)| + |g(x_0)| + 1$, entonces el conjunto $O = (-K, K)$ es abierto en $\mathbb{R}$ y contiene a los puntos $f(x_0)$ y $g(x_0)$. Hagamos $U = f^{-1}(O) \cap g^{-1}(O)$. Es claro que U es una vecindad abierta de x_0 en X y para cada $x \in U$ tenemos que $f(x) \in O$ y $g(x) \in O$ ó sea, $|f(x)| < K$ y $|g(x)| < K$.

Sea $\varepsilon > 0$. La continuidad de f y g en x_0 implica que existen vecindades abiertas V_1 y V_2 de x_0 tales que $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2K}$ para todo $x \in V_1$ y $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2K}$ para todo $x \in V_2$. El conjunto $W = V_1 \cap V_2 \cap U$ es una vecindad abierta de x_0; para todo $x \in W$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| &= |f(x) \cdot (g(x) - g(x_0)) + g(x_0) \cdot (f(x) - f(x_0)| \\
&\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\
&\leq K \cdot |g(x) - g(x_0)| + K \cdot |f(x) - f(x_0)| \\
&< K \cdot \tfrac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \tfrac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

En estos cálculos empleamos el hecho de que $|f(x)| < K$ y $|g(x_0)| < K$ así como $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2K}$ y $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2K}$ debido a que $x, x_0 \in V_1 \cap V_2 \cap U$. De modo que se estableció la continuidad de la función $f \cdot g$ en el punto x_0.

Dado un $\varepsilon > 0$, demostremos primero la continuidad de la función $\frac{1}{g}$ en el punto x_0. Consideremos el conjunto $O = \{t \in \mathbb{R} : |t| > \frac{|g(x_0)|}{2}\}$. Es claro que O es abierto en $\mathbb{R}$ y $g(x_0) \in O$. De aquí se sigue que $V = g^{-1}(O)$ es abierto en X, contiene a x_0 y $|g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{2}$ para todo $x \in V$. Consecuentemente,

(1) $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|g(x_0)|}$ para todo $x \in V$.

Como $K = \frac{1}{|g(x_0)|^2} > 0$, existe una vecindad abierta U del punto x_0 tal que $g(U) \subset (g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2K}, g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2K})$. Hagamos $W = U \cap V$ y tomemos cualquier $x \in W$. Se tiene que

$$|(\tfrac{1}{g})(x) - (\tfrac{1}{g})(x_0)| = |\tfrac{1}{g(x)} - \tfrac{1}{g(x_0)}| = |g(x) - g(x_0)| \cdot \tfrac{1}{|g(x)|\cdot|g(x_0)|}$$

Aplicando (1) concluimos que $\frac{1}{|g(x)|\cdot|g(x_0)|} \leq \frac{2}{|g(x_0)|^2} = 2K$ así que

$$|(\tfrac{1}{g})(x) - (\tfrac{1}{g})(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{2K} \cdot 2K = \varepsilon$$

para todo $x \in W$ lo cual mustra que la función $\frac{1}{g}$ es continua en el punto x_0. De modo que la función $\frac{1}{g}$ es continua. Finalmente, observe que la función $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ tiene que ser continua por ser producto de funciones continuas. □

Definición 3.10. Sea X un espacio topológico. Supongamos que $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ es una función para todo $n \in \mathbb{N}$ Diremos que la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente a una función $f \colon X \to \mathbb{R}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todos $n \geq m$ y $x \in X$.

Teorema 3.11. *Dado un espacio topológico X supongamos, que una función $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función $f \colon X \to \mathbb{R}$, entonces f es continua.*

Demostración. Dado un punto $x_0 \in X$ demostraremos que f es continua en x_0. Sea U una vecindade abierta de $f(x_0)$ en $\mathbb{R}$. Existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) \subset U$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todos $n > m$ y $x \in X$. En particular, $|f_{m+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in X$.

La función f_{m+1} es continua por lo cual existe un $V \ni x_0$ abierto en X tal que $f_{m+1}(V) \subset (f_{m+1}(x_0) - \frac{\varepsilon}{3}, f_{m+1}(x_0) + \frac{\varepsilon}{3})$. Para terminar la demostración es suficiente establecer que $f(V) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Con este fin tomemos cualquier $x \in V$. Tenemos que

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_{m+1}(x)|+|f_{m+1}(x)-f_{m+1}(x_0)|+|f_{m+1}(x_0)-f(x_0)|.$$

Como $|f_{m+1}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x \in X$, el primero y el tercer sumando son menores que $\frac{\varepsilon}{3}$. El segundo sumando es menor que $\frac{\varepsilon}{3}$ porque tenemos la contención $f_{m+1}(V) \subset (f_{m+1}(x_0) - \frac{\varepsilon}{3}, f_{m+1}(x_0) + \frac{\varepsilon}{3})$. De aquí se sigue que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ y por lo tanto quedó demostrado que $f(V) \subset U$. □

Teorema 3.12. *Sea X un espacio topológico. Supongamos que $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ y $g_n \colon X \to \mathbb{R}$ son funciones para cada $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión (f_n) converge uniformemente a f y (g_n) converge uniformemente a g, entonces*

1. $(f_n + g_n)$ *converge uniformemente a* $f + g$*;*
2. *Para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *la sucesión* $(\lambda \cdot f_n)$ *converge uniformemente a* $\lambda \cdot f$*;*
3. *Si las funciones* f_n *y* g_n *son acotadas para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(esto quiere decir que existen* $K_n > 0$*,* $L_n > 0$ *tales que* $|f_n(x)| \leq K_n$ *y* $|g_n(x)| \leq L_n$ *para todo* $x \in X$ *y* $n \in \mathbb{N}$*), entonces la sucesión* $(f_n \cdot g_n)$ *converge uniformemente a* $f \cdot g$*.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Fijemos $\varepsilon > 0$. Puesto que (f_n) converge uniformemente a f, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in X$ se tiene que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ en cuanto $n \geq m$. Análogamente, hay un $l \in \mathbb{N}$ para el cual $|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualesquiera $n \geq l$ y $x \in X$. Ahora, si $n \geq m + l$, entonces $n \geq m$ y $n \geq l$ por lo que

$$\begin{aligned}|(f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)| &= |f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

para todo $x \in X$ y esto prueba que $(f_n + g_n)$ converge uniformemente a $f + g$.

(2) Si $\lambda = 0$, es evidente que (2) se cumple. Sea $\lambda \neq 0$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ para todo $n \geq m$ y $x \in X$. Por consiguiente,

$$|\lambda \cdot f_n(x) - \lambda \cdot f(x)| = |\lambda| \cdot |f_n(x) - f(x)| < |\lambda| \cdot \tfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon,$$

para todo $n \geq m$ y $x \in X$. Con esto se probó que la sucesión $(\lambda \cdot f_n)$ converge uniformemente a $\lambda \cdot f$.

(3) Demostremos primero que la función f es acotada. Existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < 1$ para todo $x \in X$. Luego $|f(x)| - |f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| < 1$, de donde $|f(x)| \leq |f_n(x)| + 1 \leq K_n + 1$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, f es acotada. La demostración para g es análoga, así que g también es acotada. Fijemos $K > 0$ y $L > 0$ tales que $|f(x)| \leq K$ y $|g(x)| \leq L$ para todo $x \in X$; sea $M = K + L + 1$. Existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2M}\}$ y $|g_n(x) - g(x)| < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2M}\}$ para todo $n \geq m$ y $x \in X$.

Si $n \geq m$ entonces $|f_n(x)| - |f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| < 1$, y por lo tanto se cumple la desigualdad $|f_n(x)| < 1 + |f(x)| \leq 1 + K \leq M$ para todo $x \in X$. Luego

$$\begin{aligned}|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |f_n(x)(g_n(x) - g(x)) + g(x)(f_n(x) - f(x))| \\ &\leq |f_n(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| + |g(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| \\ &< M \cdot \tfrac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \tfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $x \in X$, lo cual prueba que la sucesión $(f_n \cdot g_n)$ converge uniformemente a $f \cdot g$. □

Definición 3.13. Dados dos espacios topológicos X y Y y un mapeo continuo $f\colon X \to Y$, diremos que f es un homeomorfismo si f es una biyección y f^{-1} es continuo. Los espacios X y Y se llaman homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos. La expresión $X \simeq Y$ se usará para decir que los espacios X y Y son homeomorphos.

Ejercicio 3.14. Demostrar que para cualesquiera espacios topológicos X y Y,

1. $X \simeq X$;
2. si $X \simeq Y$, entonces $Y \simeq X$;
3. si $X \simeq Y$ y $Y \simeq Z$ entonces $X \simeq Z$;
4. si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces para todo $Z \subset X$ el mapeo $f_Z = f|Z\colon Z \to f(Z)$ es un homeomorfismo.

Definición 3.15. Se dice que $\mathcal{P}$ es una propiedad topológica, si, dado un espacio X que tiene $\mathcal{P}$, cualquier espacio Y homeomorfo a X, también tiene $\mathcal{P}$.

Teorema 3.16.

1. *Si existe una biyección entre dos espacios discretos, entonces son homeomorfos.*
2. $\mathbb{R}$ *es homeomorfo a su subespacio* $(0,1)$*.*
3. $\mathbb{R}$ *no es homeomorfo a la flecha de Sorgenfrey (vea el Problema 2.Y)*
4. *La propiedad de tener una base numerable es topológica.*
5. *La propiedad de ser subconjunto de* $\mathbb{R}$ *no es topológica.*

Demostración. Todo mapeo definido en un espacio discreto es continuo (véase Proposición 3.7). Por lo tanto cualquier biyección entre dos espacios discretos es homeomorfismo, con lo que se demostró (1).

(2) La función $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \arctan(x) + \frac{1}{2}$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $(0,1)$, ya que es una biyección continua y $f^{-1}(x) = \tan(\frac{\pi}{2}(2x-1))$ también es continua. Aquí usamos el hecho conocido del Análisis de que toda función elemental es continua en los puntos de su dominio.

(3) Denotemos por S la flecha de Sorgenfrey y supongamos que $f\colon \mathbb{R} \to S$ es un homeomorfismo. Los conjuntos $A = (-\infty, 0)$ y $B = [0, +\infty)$ son abiertos en S y por lo tanto cerrados siendo cada uno complemento del otro. Sean $F = f^{-1}(A)$ y $G = f^{-1}(B)$. Como f es continuo, tenemos que F y G son no vacíos, abiertos y cerrados al mismo tiempo en $\mathbb{R}$, $F \cap G = \varnothing$ y $\mathbb{R} = F \cup G$.

Sean $a \in F$ y $b \in G$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $a < b$. Consideremos el número t =ínf$(G \cap [a,b])$. Es claro que $t \in [a,b]$. Hay dos posibilidades: $t \in F$ ó $t \in G$.

Si $t \in F$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset F$. En particular, $[t, t+\varepsilon) \cap G = \varnothing$. Pero esto quiere decir que t no puede ser el la máxima cota inferior de $G \cap [a, b]$. Esta contradicción muestra que $t \notin F$. En particular, $t > a$.

Ahora, si $t \in G$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset G$. Disminuyendo a ε si hace falta, podemos suponer que $\varepsilon < t - a$. En este caso el punto $u = t - \frac{\varepsilon}{2}$ pertenece a $G \cap [a, b]$ y $u < t$—contradicción con el hecho de que t es la máxima cota inferior de $G \cap [a, b]$. Por lo tanto no existen conjuntos F y G con las propiedades señaladas, lo que demuestra que no existe homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y S.

(4) Supongamos que los espacios X y Y son homeomorfos. Si $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable de X, sea $\mathcal{C} = \{f(U_n) : n \in \mathbb{N}\}$, donde f es algún homeomorfismo entre X y Y. Es claro, que $\mathcal{C}$ es numerable. Es más, los elementos de $\mathcal{C}$ son abiertos en Y debido a que cada uno de ellos es imagen inversa de un abierto en X bajo el mapeo continuo f^{-1}. Para demostrar que $\mathcal{C}$ es una base en Y, tomemos un $y \in Y$ y un $W \in \tau(Y)$ tales que $y \in W$. Como el mapeo f es continuo, existe un abierto $V \ni x = f^{-1}(y)$ tal que $f(V) \subset W$. Siendo $\mathcal{B}$ una base en X, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n \subset V$. Entonces, $y \in f(U_n) \subset W$ y se probó que $\mathcal{C}$ es una base numerable en Y.

(5) Basta demostrar que un subespacio de $\mathbb{R}$ puede ser homeomorfo a un espacio que no es subespacio de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, consideremos el espacio $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. If $x \in \mathbb{N}$ y $U = (x - 1, x + 1)$ entonces $U \cap \mathbb{N} = \{x\}$ por lo cual cada punto de $\mathbb{N}$ es abierto en $\mathbb{N}$. Todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es unión de conjuntos unipuntuales mismos que son abiertos. Concluimos que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ es abierto en $\mathbb{N}$ es decir $\mathbb{N}$ es un subespacio discreto de $\mathbb{R}$.

Tomando el subconjunto $D = \{(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$ del plano con la topología discreta, obtenemos un espacio discreto (la demostración es análoga) que no es subespacio de $\mathbb{R}$. Cualquier biyección entre D y $\mathbb{N}$ es homeomorfismo (véase Proposición 3.7), así que la asociación $n \to (0, n)$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{N}$ y D. □

Tarea de la Clase 3.

Esta tarea viene a completar el material sobre las funciones entre espacios topológicos arbitrarios así que es muy importante trabajar seriamente sobre ella. En los problemas que siguen la expresión $f_n \rightrightarrows f$ es una abreviación de la frase "la sucesión (f_n) converge uniformemente a f".

Problema 3.A. Demostrar que un espacio topológico X es discreto si y sólo si todo mapeo $f : X \to Y$ es continuo para cualquier espacio Y.

Problema 3.B. ¿Existe un mapeo continuo sobreyectivo de la recta $\mathbb{R}$ sobre la flecha de Sorgenfrey?

Problema 3.C. Demostrar que existe un mapeo continuo de la flecha de Sorgenfrey sobre un espacio discreto e infinito.

Problema 3.D. >Existe un mapeo continuo de los números irracionales sobre los racionales si ambos llevan la topología inducida de $\mathbb{R}$?

Problema 3.E. Demostrar que existe un mapeo continuo de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Problema 3.F. Probar que cualquier función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si $x_n \to x$ implica $f(x_n) \to f(x)$ para toda sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ (la convergencia aquí se entiende en el sentido del Análisis).

Problema 3.G. Probar que si una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inyectiva, entonces f es monótona.

Problema 3.H. Dado un espacio topológico X, sean f y g funciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Definamos $u = \max\{f, g\}$ y $v = \min\{f, g\}$ de la manera siguiente: $u(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ y $v(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in X$. Demostrar que u y v son funciones continuas en X.

Problema 3.I. Supongamos que $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Probar que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función continua.

Problema 3.J. Supongamos que f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (no necesariamente continua) tal que $|f(x) - f(y)| \le (x - y)^2$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Calcular $f(17)$ si se sabe que $f(0) = 3$.

Problema 3.K. Sea $f_n(t) = t^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0, 1)$. Demostrar que $f_n(t) \to 0$ para todo $t \in [0, 1)$, pero la sucesión (f_n) no converge uniformemente a cero en $[0, 1)$.

Problema 3.L. Demostrar que existen funciones continuas f, g, f_n, g_n, $n \in \mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $f_n \rightrightarrows f$ y $g_n \rightrightarrows g$, mientras la sucesión $(f_n \cdot g_n)$ no converge uniformemente a $f \cdot g$.

Problema 3.M. Sean f, g, f_n, g_n, $n \in \mathbb{N}$ funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $g(t) \neq 0 \neq g_n(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$ y $g_n \rightrightarrows g$. ¿Es cierto que $\frac{f_n}{g_n} \rightrightarrows \frac{f}{g}$?

Problema 3.N. Sean f, f_n, $n \in \mathbb{N}$ funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $f(t) \neq 0 \neq f_n(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$ ¿Es cierto que $\frac{1}{f_n} \rightrightarrows \frac{1}{f}$?

Problema 3.O. Sean f, f_n, $n \in \mathbb{N}$ funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $f(t) \ge 0 \le f_n(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$. ¿Es cierto que $\sqrt{f_n} \rightrightarrows \sqrt{f}$?

Problema 3.P. Sean f, g, f_n, g_n, $n \in \mathbb{N}$ funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tales que $f_n \rightrightarrows f$ y $g_n \rightrightarrows g$. ¿Es cierto que $u_n \rightrightarrows u$ y $v_n \rightrightarrows v$, donde $u_n = \max\{f_n, g_n\}$, $u = \max\{f, g\}$ y $v_n = \min\{f_n, g_n\}$, $v = \min\{f, g\}$?

Problema 3.Q. Dado un espacio topológico X supongamos que $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ (la función f_n no necesariamente es continua) para cada $n \in \mathbb{N}$. Denotemos la función $f_1 + \ldots + f_n$ por g_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos, además, que $|f_n(x)| \le c_n$ para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$. Demostrar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces la sucesión (g_n) converge uniformemente en X.

Problema 3.R. Demostrar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales considerado con la topología inducida de $\mathbb{R}$, tiene un subespacio cerrado $F \neq \mathbb{Q}$ homeomorfo a $\mathbb{Q}$.

Problema 3.S. Se sabe que la función $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homeomorfismo para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$. ¿Es necesariamente f un homeomorfismo?

Problema 3.T. Demostrar que $\mathbb{R}$ no es homeomorfo a ningún subespacio de la flecha de Sorgenfrey.

Problema 3.U. Probar que si $\mathbb{R}$ es homeomorfo a un $Y \subset \mathbb{R}$, entonces Y es abierto en $\mathbb{R}$.

Problema 3.V. Cerciorarse de que $\mathbb{R}^m$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de R^n para cualquier $n \geq m$.

Problema 3.W. Dados a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$, demostrar que $[a, b]$ es homeomorfo a $[c, d]$.

Problema 3.X. Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ distintos puntos del espacio $\mathbb{R}^n$. Definamos el segmento $[x, y] \subset \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera: $[x, y] = \{t \cdot x + (1 - t) \cdot y : t \in [0, 1]\}$. Probar que $[x, y]$, con la topología inducida de $\mathbb{R}^n$, es homeomorfo a $[0, 1]$.

Problema 3.Y. Sea $f_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homeomorfismo para todo $i \leq n$. Dado un $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ hagamos $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in \mathbb{R}^n$. Probar que el mapeo $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

Problema 3.Z. ¿Existe un subespacio de $(0, 1)$ homeomorfo a $\mathbb{Q}$?

Capítulo 4

Subespacios de $\mathbb{R}$ y sus generalizaciones

Practicamente todas las clases importantes de espacios topológicos fueron descubiertas cuando surgía la necesidad de considerar las propiedades de los subconjuntos de los reales en un contexto más amplio. El camino usual de extender un teorema más allá del ámbito de los reales es demostrarlo para $\mathbb{R}^n$, luego para los espacios de Hilbert, luego para los espacios métricos etcétera. En esta Clase presentaremos varias propiedades clásicas de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ y sus generalizaciones en el caso de espacios generales.

Empezaremos con las propiedades de separación en espacios topológicos. Varias de estas propiedades son tan importantes que se llaman *axiomas de separación*.

DEFINICIÓN 4.1. Un espacio topológico X se llama *Hausdorff* (o satisface el axioma de separación de Hausdorff) si para todos puntos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existen abiertos $U, V \subset X$ para los cuales $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. Se dice que los abiertos U y V *separan* los puntos x y y.

No todo espacio topológico es Hausdorff como muestra el siguiente ejemplo.

EJERCICIO 4.2. Probar que la familia $\tau = \{\varnothing\} \cup \{\mathbb{N} \setminus A : A \text{ es finito}\}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ es una topología en $\mathbb{N}$ y el espacio $(\mathbb{N}, \tau)$ no es Hausdorff.

Es fácil ver que la recta $\mathbb{R}$, con su topología natural, es Hausdorff. De hecho, veremos que satisface axiomas de separación más fuertes. Por lo pronto es útil el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 4.3. Todo espacio métrico es Hausdorff; por lo tanto cualquier subespacio de $\mathbb{R}$ es un espacio Hausdorff.

Para manejar propiedades de separación más fuertes necesitamos el concepto de separación funcional.

DEFINICIÓN 4.4. Dado un espacio topológico X se dice que conjuntos $A, B \subset X$ son *funcionalmente separados* si existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(A) \subset \{0\}$ y $f(B) \subset \{1\}$. Si $A = \{x\}$ entonces se dice que el punto x está funcionalmente separado de B; si, además, $B = \{y\}$ entonces decimos que los puntos x y y son funcionalmente separados.

Es claro que los conjuntos funcionalmente separados tienen que ser disjuntos. No es difícil probar que el ser funcionalmente separados implica que los conjuntos son separados por conjuntos abiertos.

EJERCICIO 4.5. Supongamos que X es un espacio topológico y $A, B \subset X$ son funcionalmente separados. Entonces existen abiertos $U, V \subset X$ que separan los conjuntos A y B, es decir, $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Para probar que $\mathbb{R}$ tiene unas propiedades fuertes de separación necesitamos asegurarnos primero de que haya suficientes funciones continuas en $\mathbb{R}$.

TEOREMA 4.6. *Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y hagamos $\rho_A(x) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces*
(i) la función $\rho_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua;
(ii) $\rho_A(x) = 0$ si $x \in \overline{A}$ y $\rho_A(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, hagamos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ y tomemos cualquier $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Existe $a \in A$ para el cual $|x-a| < \rho_A(x)+\delta$ y por lo tanto $\rho_A(y) \leq |y-a| \leq |y-x|+|x-a| < \delta+\rho_A(x)+\delta < \rho_A(x)+\varepsilon$. Esto demuestra que $\rho_A(y) - \rho_A(x) < \varepsilon$.

Por otra parte existe $a' \in A$ tal que $|y-a'| < \rho_A(y)+\delta$ lo cual implica las desigualdades $\rho_A(x) \leq |x - a'| \leq |x - y| + |y - a'| < \rho_A(y) + 2\delta < \rho_A(y) + \varepsilon$. De aquí, $\rho_A(y) - \rho_A(x) > -\varepsilon$ y por lo tanto $|\rho_A(y) - \rho_A(x)| < \varepsilon$ para todo $y \in (x - \delta, x + \delta)$. De modo que ρ_A es continua en el punto x, es decir, acabamos de demostrar (i).

Ahora, si $x \in \overline{A}$ entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $a \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A$ y por lo tamto $0 \leq \rho_A(x) \leq |x-a| < \varepsilon$; por consiguiente, $\rho_A(x) = 0$. Si $x \notin \overline{A}$ entonces $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{A}$ y el conjunto $\mathbb{R} \setminus \overline{A}$ es abierto; esto nos garantiza que hay un $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \overline{A} = \varnothing$. Luego, $|x - y| \geq \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ por lo cual $|x - y| \geq \varepsilon$ para cada $y \in A$; consecuentemente, $\rho_A(x) \geq \varepsilon > 0$, es decir, (ii) queda demostrado. $\square$

COROLARIO 4.7. *Dado cualquier subespacio $X \subset \mathbb{R}$ si A y B son conjuntos cerrados disjuntos de X entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(A) \subset \{0\}$ y $f(B) \subset \{1\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $A = \varnothing$ entonces nos sirve la función $f \equiv 1$; si $B = \varnothing$ entonces la función $f \equiv 0$ es lo que buscamos así que podemos suponer que $A \neq \varnothing$ y $B \neq \varnothing$. En este caso hagamos $f(x) = \dfrac{\rho_A(x)}{\rho_A(x) + \rho_B(x)}$ para todo $x \in X$.

Dado cualquier $x \in X$ observe que $\overline{A} \cap X = A$ y $\overline{B} \cap X = B$ por ser cerrados los conjuntos A y B. De $A \cap B = \varnothing$ se sigue que $\overline{A} \cap \overline{B} \cap X = \varnothing$ por lo que x no puede pertenecer a $\overline{A} \cap \overline{B}$; si $x \notin \overline{A}$ entonces $\rho_A(x) > 0$ y si $x \notin \overline{B}$ enotnces $\rho_B(x) > 0$ por el Teorema 4.6. De modo que $\rho_A(x) + \rho_B(x) > 0$ para cualquier $x \in X$ y por lo tanto podemos aplicar el Teorema 3.9 para ver que f es una función continua. Si $x \in B$ entonces $\rho_B(x) = 0$ por lo que $f(x) = \frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x)} = 1$. Si $x \in A$ entonces $\rho_A(x) = 0$ lo cual implica que $f(x) = 0$. □

Definición 4.8. Un espacio topológico X se llama *normal* si para cualesquiera conjuntos cerrados disjuntos $A, B \subset X$ existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(A) \subset \{0\}$ y $f(B) \subset \{1\}$, es decir, A y B son funcionalmente separados.

Por lo tanto, el Corolario 4.7 nos garantiza que todo subespacio de $\mathbb{R}$ es normal. Vamos a necesitar también el siguiente axioma de separación que lleva el nombre de Tychonoff (este apellido ruso se transliteró en alemán y por eso se lee "tíjonof").

Definición 4.9. Un espacio Hausdorff X se llama *espacio de Tychonoff* si para todo $x \in X$ y todo conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$ existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $f(F) \subset \{0\}$.

Aplicando el Ejercicio 4.3 y el Corolario 4.7 concluimos que

Corolario 4.10. *Todo subespacio de $\mathbb{R}$ es un espacio de Tychonoff.*

Para completar esta clase nos faltan otras dos propiedades fundamentales de los subconjuntos de $\mathbb{R}$: la propiedad de Bolzano-Weierstrass y la propiedad de Heine-Borel. Veremos que son equivalentes en los subespacios de $\mathbb{R}$ aunque no en espacios topológicos generales.

Definición 4.11. Un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ tiene la propiedad de Heine-Borel si para cualquier familia $\mathcal{U} \subset \tau(\mathbb{R})$ tal que $K \subset \bigcup \mathcal{U}$ existe una subfamilia finita $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tal que $K \subset \bigcup \mathcal{U}'$.

Definición 4.12. Se dice que un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass si toda sucesión $(x_n) \subset K$ tiene una subsucesión convergente cuyo límite pertenece a K.

Vamos a posponer un momento la formulación de las propiedades de Heine-Borel y Bolzano-Weierstrass para espacios topológicos generales; en lugar de ello veremos cómo se comportan en los subepacios de $\mathbb{R}$.

TEOREMA 4.13. *Dado un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ si K tiene la propiedad de Heine-Borel o la propiedad de Bolzano-Weierstrass entonces K es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que K no es acotado y consideremos la familia $\mathcal{U} = \{(i, i+2) : i \in \mathbb{Z}\}$ (recuerde que $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ es el conjunto de los números enteros). Es evidente que $\bigcup \mathcal{U} = \mathbb{R}$ así que $K \subset \bigcup \mathcal{U}$. Resulta que ninguna subfamilia finita de $\mathcal{U}$ cubre a K. En efecto, si $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ es una familia finita entonces existe $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathcal{U}' = \{(i_1, i_1+2), \dots, (i_n, i_n+2)\}$. Si $p = \min\{i_1, \dots, i_n\}$ y $q = \max\{i_1, \dots, i_n\}$ entonces $K \subset [p, q+2]$ y por lo tanto K es acotado lo cual es una contradicción. Esto quiere decir que K no tiene la propiedad de Heine-Borel.

Ahora, por ser K no acotado existe una sucesión $(x_n) \subset K$ tal que $|x_n| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Le dejamos al lector probar que la sucesión (x_n) no tiene subsucesión convergente así que K tampoco tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass. De modo que cualquiera de nuestras propiedades implica que K es acotado.

Supongamos que el conjunto K no es cerrado y fijemos un punto $a \in \overline{K} \setminus K$ (vea el Problema 2.B). Existe una sucesión $(x_n) \subset K$ tal que $x_n \to a$ (vea el Problema 2.P). Es fácil demostrar que cualquier subsucesión de (x_n) también converge a a y por lo tanto no tiene límite en K; por consiguiente, K no tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

Para demostrar que K tampoco tiene la propiedad de Heine-Borel considérese la familia $\mathcal{V} = \{\mathbb{R} \setminus [a-\varepsilon, a+\varepsilon] : \varepsilon > 0\}$. Tenemos que $\bigcup \mathcal{V} = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ y por lo tanto $K \subset \bigcup \mathcal{V}$. Si $\mathcal{V}'$ es una subfamilia finita de $\mathcal{V}$ entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k > 0$ tales que $\mathcal{V}' = \{\mathbb{R} \setminus [a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1], \dots, \mathbb{R} \setminus [a-\varepsilon_k, a+\varepsilon_k]\}$. Hagamos $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$; es inmediato que $\bigcup \mathcal{V}' = \mathbb{R} \setminus [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Como la sucesión (x_n) coverge al punto a, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ lo cual muestra que $x_m \notin \bigcup \mathcal{V}'$, es decir $\mathcal{V}'$ no cubre al conjunto K. Consecuentemente, K no tiene la propiedad de Heine-Borel. □

EJERCICIO 4.14. Supongamos que K es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces,

1. si K tiene la propiedad de Heine-Borel y L es un subconjunto cerrado de K entonces L también tiene la propiedad de Heine-Borel;
2. si K tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass y L es un subconjunto cerrado de K entonces L también tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

TEOREMA 4.15. *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ el conjunto $[a, b]$ tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión en $[a,b]$. Entonces $S = \{x \in [a,b] : \text{el conjunto } \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x\} \text{ es infinito}\}$ es no vacío ya que $b \in S$. Además $S \subset [a,b]$ es acotado por lo cual existe $p = \inf(S)$; es evidente que $p \in [a,b]$. Tomemos cualquier $\varepsilon > 0$; por la definición de p sólo hay un número finito de los elementos de la sucesión (x_n) en el intervalo $[a, p-\varepsilon]$. Si el conjunto $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ no contiene ningún elemento de la sucesión (x_n) entonces sólo hay un número finito de los términos de (x_n) que pertenecen a $[a, p+\frac{\varepsilon}{2}]$ lo cual implica que $\inf(S) \geq p + \frac{\varepsilon}{2} > p$ dándonos una contradicción.

De modo que, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in (p - \frac{1}{k}, p + \frac{1}{k})$. De aquí, (x_{n_k}) es una subsucesión de la sucesión (x_n) que converge a p. □

Teorema 4.16. *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ el conjunto $[a,b]$ tiene la propiedad de Heine--Borel.*

Demostración. Supongamos que existe una familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos tal que $[a,b] \subset \bigcup \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ no tiene subcubierta finita, es decir, $[a,b] \not\subset \bigcup \mathcal{U}'$ para toda familia finita $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Fijémonos en el conjunto $S = \{x \in [a,b] : \text{el intervalo } [a,x] \text{ no se cubre con un número finito de elementos de } \mathcal{U}\}$. El conjunto S es no vacío ya que $b \in S$; sea $p = \inf(S)$. Existe $U \in \mathcal{U}$ tal qeu $p \in U$. Como U es abierto, podemos elegir $\varepsilon > 0$ para el cual $(p-\varepsilon, p+\varepsilon) \subset U$. Por la elección de p existe una familia finita $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tal que $[a, p-\varepsilon] \subset \bigcup \mathcal{U}'$.

La familia $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}' \cup \{U\}$ también es finita mientras $[a, p+\frac{\varepsilon}{2}] \subset \bigcup \mathcal{U}''$ lo cual muestra que $\inf(S) \geq p + \frac{\varepsilon}{2} > p$; esta contradicción demuestra que $[a,b]$ tiene la propiedad de Heine--Borel. □

Corolario 4.17. *Para cualquier $K \subset \mathbb{R}$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *K tiene la propiedad de Heine-Borel;*
2. *K tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass;*
3. *K es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$.*

Demostración. El Teorema 4.13 muestra que $(i) \Longrightarrow (iii)$ y $(ii) \Longrightarrow (iii)$. Si K es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tales que $K \subset [a,b]$. Se sigue del Teorema 4.15 y del Ejercicio 4.14 que K tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass, es decir $(iii) \Longrightarrow (ii)$. Analogamente, vemos que se sigue del Ejercicio 4.14 y el Teorema 4.16 que K tiene la propiedad de Heine-Borel; esto prueba que $(iii) \Longrightarrow (i)$. □

Definición 4.18. Un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ se llama *compacto* si K tiene la propiedad de Heine-Borel o, equivalentemente, la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

Sin embargo, si queremos extender la definición de la compacidad a espacios arbitrarios, las propiedades de Heine-Borel y Bolzano-Weierstrass ya dejan de ser equivalentes y para el caso general se utiliza una generalización de la propiedad de Heine-Borel. De modo que, partiendo de ciertas propiedades geométricas de $\mathbb{R}$ acabamos de llegar a la definición de uno de los conceptos más importantes de las Matemáticas.

DEFINICIÓN 4.19. Un espacio topológico X se llama *compacto* si para toda familia $\mathcal{U} \subset \tau(X)$ tal que $\bigcup \mathcal{U} = X$ existe una familia finita $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tal que $\bigcup \mathcal{U}' = X$. En otras palabras, X es compacto si cualquier cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

Tarea de la Clase 4

Esta tarea desarrolla el tema de los axiomas de separación en espacios generales. También se presentan las propiedades básicas de los espacios compactos.

Problema 4.A. (Definición original de espacios normales). Probar que un espacio topológico X es normal si y sólo si para cualesquiera conjuntos cerrados disjuntos $F, G \subset X$ existen abiertos $U, V \subset X$ tales que $F \subset U$, $G \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Problema 4.B. Probar que cualquier espacio métrico es normal.

Problema 4.C. Demostrar que cualquier subespacio de un espacio de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.

Problema 4.D. Demostrar que cualquier subespacio de un espacio de Tychonoff es un espacio de Tychonoff.

Problema 4.E. Demostrar que cualquier subespacio cerrado de un espacio normal es un espacio normal.

Problema 4.F. Demostrar que cualquier subespacio cerrado de un espacio compacto es un espacio compacto.

Problema 4.G. Supongamos que X es un espacio compacto y $f\colon X \to Y$ es un mapeo continuo y sobreyectivo. Demostrar que Y también es compacto.

Problema 4.H. Supongamos que X es un espacio de Hausdorff y $K \subset X$ es un subespacio compacto. Demostrar que K es cerrado en X.

Problema 4.I. Probar que cualquier espacio compacto Hausdorff es normal.

Problema 4.J. Probar que cualquier subespacio de un espacio compacto Hausdorff es de Tychonoff.

Problema 4.K. Supongamos que X es un espacio compacto y $f : X \to Y$ es una biyección continua. Demsotrar que f es un homeomorpfismo.

Problema 4.L. Dado un espacio de Hausdorff X supongamos que $K, L \subset X$ son subespacios compactos disjuntos de X. Demostrar que existen conjuntos $U, V \in \tau(X)$ tales que $K \subset U$, $L \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Problema 4.M. Dado un espacio de Tychonoff X supongamos que $K \subset X$ es compacto, $F \subset X$ es cerrado en X y $K \cap F = \varnothing$. Demostrar que existen conjuntos $U, V \in \tau(X)$ tales que $K \subset U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$.

Problema 4.N. Una familia $\mathcal{F} \neq \varnothing$ de conjuntos se llama *centrada* si $\bigcap \mathcal{F}' \neq \varnothing$ para cualquier subfamilia finita $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Dado un espacio topológico X probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

i) X es compacto;

ii) $\bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\} \neq \varnothing$ para toda familia centrada $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X;

iii) $\bigcap \mathcal{F} \neq \varnothing$ para toda familia centrada $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X.

Problema 4.O. Supongamos que X es un espacio compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua. Probar que f es acotada en X, es decir, existe $r > 0$ tal que $|f(x)| \leq r$ para todo $x \in X$.

Problema 4.P. Probar que un espacio métrico (X, ρ) es compacto si y sólo si cualquier función continua $f : X \to \mathbb{R}$ es acotada en X.

Problema 4.Q. Dada una sucesión (x_n) en un espacio topológico X se dice que (x_n) converge a un punto $a \in X$ (y se escribe $x_n \to a$) si para todo abierto $U \subset X$ con $a \in U$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para cualquier $n \geq m$. Demostrar que un espacio métrico (X, ρ) es compacto si y sólo si X tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass, es decir, cada sucesión $(x_n) \subset X$ tiene una subsucesión convergente.

Problema 4.R. Demostrar que un espacio métrico (X, ρ) es compacto si y sólo si cualquier subespacio cerrado y discreto de X es finito.

Problema 4.S. Demostrar que cualquier espacio métrico compacto tiene base numerable.

Problema 4.T. Supongamos que X es un espacio Hausdorff y $\mathcal{F}$ es una familia de subespacios compactos de X. Probar que si U es un subconjunto abierto de X y $\bigcap \mathcal{F} \subset U$ entonces existe una familia finita $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ tal que $\bigcap \mathcal{F}' \subset U$.

Problema 4.U. Probar que cualquier espacio compacto Hausdorff numerable tiene una base numerable.

Problema 4.V. Un punto x de un espacio topológico X se llama *aislado* si el conjunto $\{x\}$ es abierto en X. Probar que, para cualquier espacio compacto Hausdorff X, si X es numerable y A es el conjunto de los puntos aislados de X entonces $\overline{A} = X$.

Problema 4.W. Probar que un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$.

Problema 4.X. Dado un espacio métrico (X, ρ), una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ si $\rho(x, y) < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Probar que cualquier función uniformemente continua en X es continua. Demostrar que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es continua pero no uniformemente continua.

Problema 4.Y. Probar que si (X, ρ) es un espacio métrico compacto entonces una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si f es uniformemente continua.

Problema 4.Z. Dado un espacio compacto $X \neq \varnothing$ supongamos que $f\colon X \to \mathbb{R}$ es una función continua. Demostrar que los números $m = \inf\{f(x) : x \in X\}$ y $M = \sup\{f(x) : x \in X\}$ están bien definidos y existen puntos $x_{\min}$, $x_{max} \in X$ tales que $f(x_{\min}) = m$ y $f(x_{\max}) = M$.

Capítulo 5

Espacios producto

La operación del producto, la que estudiaremos en esta clase, es un método muy poderoso para construir nuevos ejemplos de espacios topológicos. Estos ejemplos vienen en forma de subespacios de productos de espacios previamente estudiados. Es sorprendente la amplitud de las clases así obtenidas. El resultado principal es Teorema de Tychonoff de la inmersión que dice que todos los espacios de Tychonoff se pueden obtener de la recta real por medio de productos y subespacios.

Definición 5.1. Sea X_t un conjunto no vacío para todo $t \in T$. El conjunto X de todas las funciones $x\colon T \to \bigcup\{X_t : t \in T\}$ tales que $x(t) \in X_t$ para todo $t \in T$, se llama producto cartesiano de los conjuntos X_t, y se denota $\prod\{X_t : t \in T\}$ ó $\prod_{t\in T} X_t$. En el caso de que $X_t = Y$ para todo $t \in T$, denotaremos el producto $\prod_{t\in T} X_t$ por Y^T. Si $X_t = \varnothing$ para algún $t \in T$, hacemos $\prod\{X_t : t \in T\} = \varnothing$.

Comentario 5.2. Si $T = \{1, 2\}$, entonces se suele denotar el producto $\prod_{t\in T} X_t$ por $X_1 \times X_2$ y definirlo como el conjunto de todos los pares (x_1, x_2) donde $x_i \in X_i$, $i = 1, 2$. Esta definición es equivalente a la presentada en 5.1.

Demostración. Si $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$ entonces el par (x_1, x_2) puede interpretarse como una función $x\colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2$ tal que $x(1) = x_1$ y $x(2) = x_2$. Recíprocamente, si $f\colon \{1, 2\} \to X_1 \cup X_2$ y $f(i) \in X_i$ para cada $i = 1, 2$ entonces el par $x = (f(1), f(2))$ es un elemento del producto definido de la manera tradicional. □

Proposición 5.3. *Sea $\{X_t : t \in T\}$ una familia de conjuntos. Supongamos que $A_t \subset X_t$ para todo $t \in T$. Entonces*

1. *$A = \prod\{A_t : t \in T\} \subset X = \prod\{X_t : t \in T\}$;*
2. *si $\varnothing \neq B_t \subset X_t$ para todo $t \in T$ y $A = \prod\{A_t : t \in T\} = B = \prod\{B_t : t \in T\}$, entonces $A_t = B_t$ para cada $t \in T$.*

Demostración. De acuerdo a la definición, cada $x \in A$ es una función de T en $\bigcup\{A_t : t \in T\}$ tal que $x(t) \in A_t$ para todo $t \in T$. Pero tenemos la contención $\bigcup\{A_t : t \in T\} \subset \bigcup\{X_t : t \in T\}$ y $x(t) \in A_t \subset X_t$, así que $x \in X$ y el inciso (1) quedó demostrado.

Observemos antes que nada, que se sigue de la definición del producto que $A_t \neq \varnothing$ para todo $t \in T$ debido a que $A = B \neq \varnothing$. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un $t_0 \in T$ tal que $A_{t_0} \neq B_{t_0}$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $A_{t_0} \setminus B_{t_0} \neq \varnothing$ y por lo tanto podemos tomar un punto $a_0 \in A_{t_0} \setminus B_{t_0}$. Definamos un $x \in \prod\{A_t : t \in T\}$ como sigue: $x(t_0) = a_0$ y $x(t) = a_t$, donde a_t es un punto arbitario de A_t para todo $t \neq t_0$. Tenemos que $x \in A$, pero $x(t_0) \notin B_{t_0}$ por lo que $x \notin B$. De modo que $x \in A \setminus B$ y esto es una contradicción. □

Ejercicio 5.4. Sea X un conjunto arbitrario. Si (Y, τ) es un espacio topológico y $f\colon X \to Y$ es un mapeo, entonces la familia $f^{-1}(\tau) = \{f^{-1}(U) : U \in \tau\}$ es una topología en X.

Teorema 5.5. *Sea X un conjunto arbitrario. Supongamos que (Y_t, τ_t) es un espacio topológico para cada $t \in T$, y que están dados mapeos $f_t\colon X \to Y_t$ para $t \in T$. Entonces:*

1. *la familia $\mathcal{B} = \bigcup\{f_t^{-1}(\tau_t) : t \in T\}$ genera una topología τ como subbase;*
2. *el mapeo $f_t\colon (X, \tau) \to (Y_t, \tau_t)$ es continuo para todo $t \in T$;*
3. *si μ es una topología en X tal que cada mapeo $f_t\colon (X, \mu) \to (Y_t, \tau_t)$ es continuo, entonces $\tau \subset \mu$.*

La topología τ se llama **topología generada por los mapeos** f_t.

Demostración. (1) La familia $\mathcal{B}$ genera una topología como una subbase, ya que para todo $t \in T$ se tiene que $\bigcup \mathcal{B} \supset \bigcup f_t^{-1}(\tau_t) = f_t^{-1}(\bigcup \tau_t) = f_t^{-1}(Y_t) = X$. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{B} = X$ y es aplicable el Problema 2.H según el cual existe una única topología τ en X tal que $\mathcal{B}$ es subbase para τ.

Si $U \in \tau_t$, entonces $f_t^{-1}(U)$ pertenece a $\mathcal{B}$ y por lo tanto, a τ. Esto demuestra que todos los mapeos $f_t\colon (X, \tau) \to (Y, \tau_t)$ son continuos.

Supongamos que μ es una topología en X tal que $f_t\colon (X, \mu) \to (Y, \tau_t)$ es continuo para todo $t \in T$. Tomemos cualquier $U \in \tau$. Como $\mathcal{B}$ es subbase de τ, existe una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X cada elemento de la cual es intersección finita de los elementos de $\mathcal{B}$ y tal que se cumple $\bigcup \mathcal{U} = U$.

Sea $W \in \mathcal{U}$. Entonces existen $t_1, \dots, t_n \in T$ y $U_i \in \tau_{t_i}$, $i = 1, \dots, n$ tales que $W = \bigcap\{f_{t_i}^{-1}(U_i) : i = 1, \dots, n\}$. Recordando que $f_t\colon (X, \mu) \to (Y, \tau_t)$ es continuo para todo $t \in T$, podemos concluir que $f_{t_i}^{-1}(U_i) \in \mu$ para todo i y por lo tanto $W \in \mu$. Esto demuestra que $\mathcal{U} \subset \mu$. Como μ es una topología, se tiene que $U = \bigcup \mathcal{U} \in \mu$. Siendo U un elemento arbitrario de τ, resulta que $\tau \subset \mu$. □

DEFINICIÓN 5.6. Sea (X_t, τ_t) un espacio topológico para todo $t \in T$. Si $t \in T$, definiremos la proyección natural p_t del conjunto $X = \prod\{X_t : t \in T\}$ sobre el factor X_t haciendo $p_t(x) = x(t)$ para todo $x \in X$. La topología τ en X, generada por los mapeos $\{p_t : t \in T\}$, se llama *topología del producto* y el espacio (X, τ) se llamará *producto topológico.*

TEOREMA 5.7. *Sea X_t un espacio topológico para todo $t \in T$ y sea $X = \prod_{t \in T} X_t$ su producto topológico. Si $t_1, \ldots, t_n \in T$ y $O_i \in \tau(X_{t_i})$, $i = 1, \ldots, n$, sea $[t_1, \ldots, t_n; O_1, \ldots, O_n] = \{x \in X : x(t_i) \in O_i,\ i = 1, \ldots, n\}$. Entonces la familia $\mathcal{B}_X = \{[t_1, \ldots, t_n; O_1, \ldots, O_n] : n \in \mathbb{N},\ t_i \in T,\ O_i \in \tau(X_{t_i})$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}\}$ es una base de X que se llama base canónica de X. Ademas, $[t_1, \ldots, t_n; O_1, \ldots, O_n] = O_1 \times \ldots \times O_n \times \prod\{X_t :\in T \setminus \{t_1, \ldots, t_n\}\}$ en cuanto $t_1, \ldots, t_n \in T$ y $O_i \in \tau(X_{t_i})$ para cada $i \leq n$.*

Por eso la base canónica del producto infinito es una generalización de la base de rectángulos del producto finito.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que se tiene la igualdad

$$[t_1, \ldots, t_n; O_1, \ldots, O_n] = \bigcap\{[t_i, O_i] : i = 1, \ldots, n\}.$$

Además, $[t_i, O_i] = p_{t_i}^{-1}(O_i)$ así que $\mathcal{B}_X$ es exactamente la base generada por la subbase $\mathcal{B} = \bigcup\{p_t^{-1}(\tau(X_t)) : t \in T\}$. Como la topología de X está generada por las proyecciones $\{p_t : t \in T\}$, acabamos de demostrar que $\mathcal{B}_X$ es base en X.

Si $x \in [t_1, \ldots, t_n; O_1, \ldots, O_n]$ entonces x es una función que manda T en $\bigcup\{X_t : t \in T\}$ y tiene la propiedad adicional de que $x(t_i) \in O_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces, $x \in O_1 \times \ldots \times O_n \times \prod\{X_t :\in T \setminus \{t_1, \ldots, t_n\}\}$.

Por otra parte, si $x \in O_1 \times \ldots \times O_n \times \prod\{X_t :\in T \setminus \{t_1, \ldots, t_n\}\}$, entonces $x(t_i) \in O_i$ y por lo tanto $x \in [t_1, \ldots, t_n; O_1, \ldots, O_n]$. □

PROPOSICIÓN 5.8. *Sea X_t un espacio topológico para cada $t \in T$. Si $A_t \subset X_t$ para cada $t \in T$, y $A = \prod\{A_t : t \in T\} \subset X = \prod\{X_t : t \in T\}$, entonces la topología de A heredada de X, coincide con la topología del producto de los conjuntos A_t con la topología heredada de X_t para cada $t \in T$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea τ la topología de A heredada de X. Denotemos por μ la topología del producto en A para demostrar que $\tau = \mu$. Si $q_t \colon A \to A_t$ es la proyección respectiva, entonces $q_t = p_t|A$. Como p_t es una función continua, la proyección q_t también es continua (vea la Proposición 3.6) para cada $t \in T$. Esto implica que $\mu \subset \tau$ por el Teorema 5.5.

Ahora observemos, que $[t, O] \cap A = \{x \in A : x(t) \in O\}$ para todo $t \in T$ y $O \in \tau(X_t)$. Entonces, la intersección de todo elemento de la subbase canónica de X es elemento de la subbase canónica de A. Es fácil ver que las interseccíones de todos los elementos de la subbase de X forman una subbase de la topología en A heredada de X. Ya vimos que cada una de estas intersecciones es elemento de la subbase canónica del producto y por lo tanto pertenece a μ. Entonces $\tau \subset \mu$ y con esto se demostró que $\tau = \mu$. $\square$

TEOREMA 5.9. *Supongamos que X_t un espacio topológico para cada $t \in T$. Si $f\colon Y \to X = \prod\{X_t : t \in T\}$, entonces la función f es continua si y sólo si la composición $p_t \circ f$ es continua para cada $t \in T$.*

DEMOSTRACIÓN. Si la función f es continua, entonces $p_t \circ f$ es continua para cada $t \in T$ porque la composición de funciones continuas es una función continua por la Proposición 3.6.

Supongamos que $p_t \circ f$ es continua para cada $t \in T$. Según el Teorema 3.5, para demostrar la continuidad de f, basta encontrar una subbase $\mathcal{B}$ en X tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en Y para todo $U \in \mathcal{B}$. Sabemos que $\mathcal{B} = \bigcup\{p_t^{-1}(\tau(X_t)) : t \in T\}$ es una subbase en X (vea 2.4.6). Dado un $U \in \mathcal{B}$, existe un $t \in T$ tal que $U = p_t^{-1}(O)$, donde O es abierto en X_t. Como el mapeo $p_t \circ f$ es continuo y $f^{-1}(U) = f^{-1}(p_t^{-1}(O)) = (p_t \circ f)^{-1}(O)$, podemos concluir que $f^{-1}(U)$ es abierto en Y y por lo tanto f es continuo. $\square$

TEOREMA 5.10. *Supongamos que X_t un espacio topológico para cada $t \in T$. Si $T = \bigcup\{S_w : w \in W\}$, donde los conjuntos S_w son disjuntos y no-vacíos, entonces el espacio $X = \prod\{X_t : t \in T\}$ es homeomorfo a $Y = \prod_{w\in W}(\prod_{t\in S_w} X_t)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in X$. Para todo $w \in W$ hagamos $x_w = x|S_w$ y $\varphi(x)(w) = x_w$. Es claro que $\varphi(x) \in Y$, así que tenemos un mapeo $\varphi\colon X \to Y$. Verifiquemos primero que φ es una biyección. Dados $x, y \in X$, $x \neq y$, existe un $t \in T$ tal que $x(t) \neq y(t)$. Como los conjuntos S_w cubren T, podemos hallar un $w \in W$ para el cual $t \in S_w$. Evidentemente $x(t) = x_w(t) \neq y_w(t) = y(t)$, así que $x_w \neq y_w$. Esto demuestra que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Tomemos cualquier punto $y \in Y$. Para todo $w \in W$ tenemos la función $y(w)\colon S_w \to \bigcup\{X_t : t \in S_w\}$. Siendo disjuntos los conjuntos S_w, podemos definir unívocamente una función x así: $x(t) = y(w)(t)$, donde w es el único elemento de W para el cual $t \in S_w$. Recordando que $T = \bigcup\{S_w : w \in W\}$, nos damos cuenta de que x es una función de T en $\bigcup\{X_t : t \in T\}$. Es más, si $t \in T$, entonces $t \in S_w$ para un $w \in W$ y $x(t) = y(w)(t) \in X_t$, con lo que nos cercioramos de que $x \in X$. Notando que $x_w = y(w)$ para todo $w \in W$, vemos que $\varphi(x) = y$ y por lo tanto φ es una biyección.

Para verificar que φ es continua, basta etablecerlo para las composiciones $q_w \circ \varphi$, $w \in W$, donde $q_w\colon Y \to \prod\{X_t : t \in S_w\}$ es la proyección natural de Y sobre $\prod\{X_t : t \in S_w\}$ que es la w-ésima coordenada de Y. Con este propósito fijemonos en un $w \in W$. Para probar que $q_w \circ \varphi$ es continuo, es suficiente mostrar que para todo $t \in S_w$ el mapeo $r_t \circ (q_w \circ \varphi)$ es continuo, donde r_t es la proyección de $\prod\{X_t : t \in S_w\}$ sobre X_t, o sea $r_t(z) = z(t)$ para todo $z \in \prod\{X_t : t \in S_w\}$ (aquí usamos el Teorema 5.9 por la segunda vez).

Observando que $r_t \circ (q_w \circ \varphi)(x) = r_t(x|S_w) = x(t)$, vemos que la composición $r_t \circ (q_w \circ \varphi)$ es igual a p_t, y por lo tanto es continua. De modo que φ es continuo.

Asimismo, utilizaremos el Teorema 5.9 para mostrar que φ^{-1} es continuo. Para cualquier $t \in T$ tenemos que $p_t \circ \varphi^{-1} = r_t \circ q_w$, donde w es el único elemento de W tal que $t \in S_w$. Como la proyecciones r_t y q_w son continuas, el mapeo $p_t \circ \varphi^{-1}$ también lo es. $\square$

TEOREMA 5.11. *Supongamos que X_t es un espacio topológico para cada $t \in T$. Si $\varphi\colon T \to T$ es una biyección, entonces los espacios $X = \prod\{X_t : t \in T\}$ y $Y = \prod\{X_{\varphi(t)} : t \in T\}$ son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y_t = X_{\varphi(t)}$; entonces, $Y = \prod\{Y_t : t \in T\}$ y $X_t = Y_{\varphi^{-1}(t)}$ para todo $t \in T$. Dado un $x \in X$ hacemos $f(x) = x \circ \varphi$. Para cualquier $t \in T$ tenemos que $f(x)(t) = x(\varphi(t)) \in X_{\varphi(t)} = Y_t$. Por lo tanto, $f(x) \in Y$, o sea f es un mapeo de X en Y.

Para todo $y \in Y$ hagamos $g(y) = y \circ \varphi^{-1}$; esto nos garantiza que $g(y)(t) = y(\varphi^{-1}(t)) \in Y_{\varphi^{-1}(t)} = X_t$ para cada $t \in T$. De modo que g es una función de Y en X. Además, para todo $x \in X$ se tiene que $g(f(x)) = g(x \circ \varphi) = x \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = x$. Asimismo $f(g(y)) = f(y \circ \varphi^{-1}) = y \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = y$ para cada $y \in Y$. De aquí se sigue que f y g son biyecciones y $g = f^{-1}$.

Usando una vez más el Teorema 5.9, demostraremos que f y g son continuos. Denotemos por q_t la proyeccion de Y sobre Y_t; como siempre, p_t será la proyección de X sobre X_t para todo $t \in T$.

Tomemos un $t \in T$ arbitrario. Para todo $x \in X$ se tiene que $q_t \circ f(x) = q_t(f(x)) = f(x)(t) = x(\varphi(t)) = p_{\varphi(t)}(x)$. De modo que $q_t \circ f$ coincide con $p_{\varphi(t)}$. La función $p_{\varphi(t)}$ es continua por ser una proyección en X, de lo que se desprende que $q_t \circ f$ es continua. Esto muestra que f es una función continua.

En aras de demostrar que $f^{-1} = g$ es continua, fijemonos en un $t \in T$ arbitrario. Para todo $y \in Y$ se tiene que $p_t \circ g(x) = p_t(g(x)) = g(y)(t) = y(\varphi^{-1}(t)) = q_{\varphi^{-1}(t)}(Y)$. De modo que $p_t \circ g$ coincide con $q_{\varphi^{-1}(t)}$. La función $q_{\varphi^{-1}(t)}$ es continua por ser una proyección en Y, de lo que se desprende que $p_t \circ g$ es continua. Esto establece que g también es una función continua. $\square$

EJERCICIO 5.12. Sabiendo que el espacio X_t es Hausdorff para todo $t \in T$ demostrar que el espacio $X = \prod_{t\in T} X_t$ también es Hausdorff.

Ejercicio 5.13. Sabiendo que el espacio X_t es de Tychonoff para todo $t \in T$ demostrar que el espacio $X = \prod_{t \in T} X_t$ también es de Tychonoff.

El siguiente teorema fundamental muestra que cualquier espacio de Tychonoff se obtiene del intervalo $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ (la topología de I se hereda de $\mathbb{R}$) por medio de productos y subespacios.

Teorema 5.14 (de Tychonoff de la Inmersión). *Supongamos que X es un espacio topológico. Entonces X es de Tychonoff si y sólo si existe un conjunto A tal que X es homeomorfo a un subespacio del producto I^A.*

Demostración. El segmento $[0, 1]$ es Tychonoff debido a que es un subespacio de $\mathbb{R}$ (vea el Corolario 4.10). Empleando el Ejercicio 5.13 vemos que cualquier producto de segmentos es Tychonoff y por lo tanto todo subespacio suyo también lo es. Esto establece la suficiencia, o sea que todo espacio homeomorfo a un subespacio de I^A es de Tychonoff.

Supongamos ahora que X es un espacio de Tychonoff y consideremos el conjunto $A = \{\alpha \colon X \to [0, 1] : \alpha$ es una función continua$\}$. Para todo $x \in X$ definimos $h(x) \in I^A$ de la manera siguiente: $h(x)(\alpha) = \alpha(x)$; esto nos brinda un mapeo $h \colon X \to I^A$. Sea $Y = h(X) \subset I^A$; podemos considerar que $f \colon X \to Y$ así que es suficiente probar que h es un homeomorfismo.

Es consecuencia inmediata de la definición que h es sobreyectivo. Si $x, y \in X$ y $x \neq y$, entonces el conjunto $\{y\}$ es cerrado (recuerde que todo espacio de Tychonoff es Hausdorff) y no contiene a x. De modo que existe una función continua $f \colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$. Hagamos $\alpha(x) = f(x)$ si $f(x) \in I$; si $f(x) < 0$ hacemos $\alpha(x) = 0$ y si $f(x) > 1$ entonces $\alpha(x) = 1$. Es un ejercicio fácil que $\alpha \colon X \to I$ es una función continua para la cual $\alpha(x) = 1$ y $\alpha(y) = 0$. Como $\alpha \in A$, tenemos que $\alpha(x) = h(x)(\alpha) \neq \alpha(y) = h(y)(\alpha)$ así que $h(x) \neq h(y)$. Por lo tanto h es una biyección.

Para todos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ y $O_1, \dots, O_n \in \tau(\mathbb{R})$ consideremos el conjunto $W = [\alpha_1, \dots, \alpha_n, O_1, \dots, O_n] = \{f \in I^A : f(\alpha_i) \in O_i$ para todo $i = 1, \dots, n\}$; entonces W es un abierto canónico de I^A (vea el Teorema 5.7). Demostremos que se cumple

(1) $h^{-1}(W \cap Y) = \bigcap\{\alpha_i^{-1}(O_i) : i = 1, \dots, n\}$.

Tenemos que $x \in h^{-1}(W \cap Y)$ si y sólo si $h(x) \in W$ y esto sucede si y sólo si $h(x)(\alpha_i) = \alpha_i(x) \in O_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Ahora es claro que $x \in h^{-1}(W \cap Y)$ si y sólo si $x \in \alpha_i^{-1}(O_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ así que (1) está demostrado.

Sea $\mathcal{B}$ la familia de los conjuntos abiertos canónicos de I^A. Se sabe que $\mathcal{B}$ es base en I^A (vea el Teorema 5.7) así que $\mathcal{B}_Y = \{W \cap Y : W \in \mathcal{B}\}$

es una base en Y. De acuerdo al Teorema 3.5, si $h^{-1}(U)$ es abierto para todo $U \in \mathcal{B}_Y$, entonces h es continuo.

Tomemos cualquier conjunto $U \in \mathcal{B}_Y$; entonces $U = W \cap Y$ para algún $W = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n, O_1, \ldots, O_n]$. Empleando la propiedad (1), concluimos que $h^{-1}(U) = \bigcap\{\alpha_i^{-1}(O_i) : i = 1, \ldots, n\} \in \tau(X)$ ya que las funciones α_i son continuas. Por lo tanto $h^{-1}(U)$ es abierto siendo igual a la intersección de un número finito de abiertos en X. Resulta que h es un mapeo continuo.

Fijemos un punto arbitrario $y \in Y$ para demostrar que h^{-1} es continuo en y. Sea $x = h^{-1}(y)$. Dado un abierto $U \ni x$, existe una función $\alpha \in A$ tal que $\alpha(x) = 1$, $\alpha(z) = 0$ para todo $z \in X \setminus U$. De aquí $V = \alpha^{-1}((0,1])$ es abierto en X y $x \in V \subset U$. Hagamos $W = [\alpha, (0,1]]$. El conjunto W es un abierto canónico de I^A y $h^{-1}(W \cap Y) = \alpha^{-1}((0,1]) = V \subset U$. Sólo queda ver que $y \in W \cap Y$ debido a que $y(\alpha) = h(x)(\alpha) = \alpha(x) = 1$. Por lo tanto h^{-1} es continuo en y y esto prueba que h es un homeomorfismo. $\square$

Tarea de la Clase 5

Esta última tarea contiene preguntas de dificultad variable. La respuesta puede requerir un renglón o varias páginas así que no se desanime si no le sale la respuesta. Al fin que la vida fácil es aburrida.

Problema 5.A. Probar que la topología natural de $\mathbb{R}^n$ coincide con la topología del producto de n copias de $\mathbb{R}$.

Problema 5.B. Probar que un espacio X es Hausdorff si y sólo si su diagonal $\{(x,x) : x \in X\}$ es cerrada en el espacio $X \times X$.

Problema 5.C. Probar que un espacio X es discreto si y sólo si su diagonal $\{(x,x) : x \in X\}$ es abierta en el espacio $X \times X$.

Problema 5.D. Dados espacios topológicos X y Y supongamos que $f\colon X \to Y$ es una función continua. El subespacio $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ del producto $X \times Y$ se llama *la gráfica* de la función f. Probar que la proyección $p\colon G(f) \to X$ es una homeomorpfismo (recuerde que $p(x, f(x)) = x$ para todo $x \in X$).

Problema 5.E. Supongamos que X y Y son espacios compactos de Hausdorff. Demostrar que una función $f\colon X \to Y$ es continua si y sólo si su gráfica $G(f)$ es cerrada en el producto $X \times Y$.

Problema 5.F. Supongamos que X_t es un espacio topológico y $A_t \subset X_t$ para todo $t \in T$. Para el conjunto $A = \prod_{t\in T} A_t \subset X = \prod_{t\in T} X_t$ demostrar que $\overline{A} = \prod_{t\in T} \overline{A_t}$.

Problema 5.G. Supongamos que X es un espacio y $f_t\colon X \to Y_t$ es un mapeo continuo para todo $t \in T$. Hagamos $f(x)(t) = f_t(x)$ para todo $t \in T$ y $x \in X$; esto nos brinda un mapeo $f\colon X \to Y = \prod_{t\in T} Y_t$ mismo que se llama *el producto diagonal* de la familia $\{f_t : t \in T\}$. Demostrar que f es un mapeo continuo.

Problema 5.H. Dados espacios X_t y Y_t supongamos que un mapeo $f_t\colon X_t \to Y_t$ es continuo para todo $t \in T$. Para los espacios $X = \prod_{t\in T} X_t$ y $Y = \prod_{t\in T} Y_t$ definamos un mapeo $f\colon X \to Y$ por la fórmula $f(x)(t) = f_t(x(t))$ para todos $x \in X$ y $t \in T$. El mapeo f se llama *el producto* de la familia $\{f_t : t \in T\}$; probar que f es continuo.

Problema 5.I. Demostrar que cualquier producto de homeomorpfismos es un homeomorfismo.

Problema 5.J. Sea X_t un espacio topológico para todo $t \in T$. Dado cualquier $S \subset T$ hagamos $X_S = \prod_{t\in S} X_t$; sea $X = X_T$. Fijemos un $S \subset T$; para cualquier $f \in X$ sea $p_S(f) = f|S$. Demostrar que la función $p_S\colon X \to X_S$ es continua y $p_S(U)$ es abierto en X_S para cualquier $U \in \tau(X)$.

Problema 5.K. Supongamos que X_n es un espacio con base numerable para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que el espacio $X = \prod\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ también tiene base numerable.

Problema 5.L. Probar que si T no es numerable entonces el espacio $\mathbb{R}^T$ no tiene base numerable.

Problema 5.M. Demostrar que un espacio de Tychonoff X tiene base numerable si y sólo si existe un conjunto numerable A tal que X es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^A$.

Problema 5.N. Un espacio X se llama separable si existe un conjunto numerable $A \subset X$ tal que $\overline{A} = X$. Probar que un espacio de Tychonoff X tiene base numerable si y sólo si X es separable y existe una métrica ρ en X tal que ρ genera $\tau(X)$.

Problema 5.O. Supongamos que (X_n, ρ_n) es un espacio métrico y $\rho_n(x,y) \le 1$ para todos $x, y \in X_n$ y $n \in \mathbb{N}$. Dados $x, y \in X = \prod\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ hagamos $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n}\rho_n(x(n), y(n))$. Demostrar que ρ es una métrica en X que genera la topología del producto de X.

Problema 5.P. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y (X_i, ρ_i) es un espacio métrico para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Para cualesquiera $x, y \in X = X_1 \times \ldots \times X_n$ hagamos $\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x(i), y(i))$. Demostrar que ρ es una métrica en X que genera la topología del producto de X.

Problema 5.Q. Probar que el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es separable, es decir, existe un conjunto numerable $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tal que $\overline{A} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Problema 5.R. Supongamos que T es un conjunto no vacío y $f_0 \in \mathbb{R}^T$. Hagamos $\varphi(f) = f + f_0$ para todo $f \in \mathbb{R}^T$. Probar que $\varphi\colon \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$ es un homeomorfismo.

Problema 5.S. Supongamos que T es un conjunto no vacío y $f_0 \in \mathbb{R}^T$. Hagamos $\varphi(f) = f \cdot f_0$ para todo $f \in \mathbb{R}^T$. Probar que el mapeo $\varphi\colon \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$ es continuo.

Problema 5.T. Sea $C(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto de todas las funciones continuas. Probar que $\overline{C(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Problema 5.U. Demostrar que el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no es unión numerable de sus subespacios compactos.

Problema 5.V. Supongamos que K y X son espacios de Tychonoff y K es un espacio compacto. Para la proyección natural $p_X\colon X \times K \to X$ probar que el conjunto $p_X(F)$ es cerrado en X en cuanto F es un conjunto cerrado de $X \times K$.

Problema 5.W. (Lema de Alexander) Probar que un espacio X es compacto si y sólo si existe una subbase $\mathcal{B}$ en X tal que cualquier cubierta de X con elementos de $\mathcal{B}$ tiene una subcubierta finita (dicho de manera formal, esto significa que si $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ y $\bigcup \mathcal{U} = X$ entonces existe una familia finita $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ tal que $\bigcup \mathcal{U}' = X$).

Problema 5.X. Dado un espacio compacto X_t para todo $t \in T$ demostrar que el espacio $X = \prod_{t \in T} X_t$ es compacto.

Problema 5.Y. Denotemos por I el subespacio $[0, 1]$ de la recta real. En I^I considere el subespacio $K = \{f \in I^I : x \leq y \text{ implica que } f(x) \leq f(y)\}$. Demostrar que K es compacto.

Problema 5.Z. Se dice que una sucesión (x_n) en un espacio topológico X converge a un punto $a \in X$ si para todo $U \in \tau(X)$ tal que $a \in U$ existe $m \in \mathbb{N}$ para el cual $x_n \in U$ para todo $n \geq m$. Denotemos por I el subespacio $[0, 1]$ de la recta real. En I^I considere el subespacio $S = \{f \in I^I :$ el conjunto $f^{-1}((0, 1])$ es numerable$\}$. Demostrar que S no es compacto mientras toda sucesión $(x_n) \subset S$ tiene una subsucesión convergente a un punto de S. En otras palabras, el espacio S tiene la propiedad de Bolzano-Weierstrass pero no la propiedad de Heine-Borel.

Bibliografía

[1] A.V. Arhangel'skii, V.I. Ponomarev, *Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises*, Mathematics and its Applications. D. Reidel Publishing company. 1984.

[2] R. Engelking, *General Topology,* PWN, Warszawa, 1977.

[3] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Springer Verlag, New York, 1960.

[4] J.L. Kelley, *General Topology,* D. van Nostrand Company Inc., New York, 1957.

[5] K. Kunen, *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs,* Elsevier, New York, 1980.

[6] K. Kuratowski, *Topology, Vol. 1,* Academic Press, New York, 1966.

[7] K. Kuratowski, A. Mostowski, *Set Theory, (with an introduction to descriptive set theory),* PWN, Warszawa, 1976.

[8] S. Lipschutz, *Theory and Problems of General Topology,* McGraw Hill Book Company, New York, 1965.

[9] J.C. Oxtoby, *Measure and Category,* Springer, New York, 1971.

[10] V.V. Tkachuk, *Curso Básico de Topología General,* UAM-Iztapalapa, México D.F., 1999.